[] []

N d'ordre :

THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE BORDEAUX I

ECOLE DOCTORALE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

par

Raphaël LOUBERE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Une Méthode Particulaire Lagrangienne de type Galerkin Discontinu

Application à la Mécanique des Fluides et l'Interaction Laser/Plasma

---

Soutenue le : 18 octobre 2002

Après avis des rapporteurs :

M.B.Desprès	Professeur, Université Pierre et Marie Curie
M.J.M.Moschetta	Professeur, SupAéro

Devand la Commission d'examen formée de :

M.A.Y.Le Roux	Professeur, Université Bordeaux I	Président du Jury
M.R.Abgrall	Professeur, Université Bordeaux I	
M.G.Bonnaud	Ingénieur-Chercheur, CEA	
M.A.Bourgeade	Ingénieur-Chercheur, CEA-CESTA	invité
M.B.Desprès	Professeur, Université Pierre et Marie Curie	
M.J.M.Moschetta	Professeur, SupAéro	
M.J.Ovadia	Ingénieur-Chercheur, CEA-CESTA	invité
M.V.Tikhontchuk	Professeur, Université Bordeaux I	

- 2002 -

Remerciements

Les premiers remerciements que j'aimerais exprimer sont pour **Jean Ovadia**. Non seulement il a eu le douloureux privilège de me supporter en tant que stagiaire militaire pendant dix longs mois, mais il a ensuite accepté de rempiler trois ans. Je ne sais comment lui exprimer ma gratitude de m'avoir guidé à travers les méandres des «méthodes lagrangiennes» en ayant toujours une explication de mécanicien, une démonstration «avec les mains», aux problèmes qui me perturbaient.
Sa présence, ou plutôt ma capacité à le déranger quotidiennement, a fait que nous avons bien souvent partagé plus que de simples discussions techniques. J'ai donc découvert durant ces nombreuses digressions une personne d'une érudition et d'une gentillesse à rendre jaloux... si bien que de responsable-CEA il a muté successivement en collègue puis en ami.

Durant ces trois dernières années j'ai hanté le bureau de **Rémi Abgrall**, mon directeur de thèse. Malgré son emploi du temps très chargé il a toujours trouvé du temps à m'accorder. Par chance, il n'a jamais eu besoin de beaucoup de réflexion pour résoudre mes problèmes. Par exemple la première année j'ai souvenir d'une démonstration qui m'échappait depuis deux ou trois semaines : je suais sur mes brouillons en vain. Persuadé d'avoir un problème ardu entre les mains, je le présentais à Rémi un jeudi matin vers 10h30. Les mains croisés derrière la tête, bien ancré dans son fauteuil, il ne lui a fallu que 3 minutes pour me démontrer toute l'étendu de mon manque de savoir. Ce problème «ardu» avait rendu l'âme si facilement entre ses mains qu'à 10h35 nous prenions notre café hebdomadaire... secrêtement persuadé que l'on ne m'y reprendrai plus ! Je suis tombé dans le même piège tellement souvent avec Rémi par la suite que j'ai appris (à mes dépends) à être humble quand désormais je rencontre des «grandes personnes». Je tiens à le remercier chaleureusement pour son aide, sa gentillesse... et son abnégation à renier sa religion eulerienne pour la secte des lagrangiens presque tous les jeudis matins entre 10h00 et 11h00.

Alain-Yves Le Roux et **Marie-Noëlle Le Roux** sont vraisemblablement les personnes qui m'ont le plus épaulé depuis mes débuts d'étudiant jusqu'à aujourd'hui. La famille Le Roux (comme j'aime à les appeler affectueusement) m'a fait confiance pour tous mes stages de fin d'études. C'est grace à Marie-Noëlle Le Roux que j'ai véritablement réalisé l'utilité de ce qui m'était enseigné alors que j'effectuais un stage en partenariat avec des entomologues de l'INRA. Elle m'a permi de rencontrer des binômes atypiques (mathématiciens et entomologues) qui arrivaient mystérieusement à communiquer et travailler pour un objectif commun. Je pense avoir su à ce moment que mon choix d'étudier les mathématiques appliquées avait été judicieux. Je la remercie vivement de m'avoir fait confiance et de m'avoir convaincu de la véracité de ce choix crucial.
Je souhaite bien évidemment remercier Alain-Yves Le Roux pour deux raisons au moins (chacune d'elle étant cependant suffisante seule). Il m'a tout d'abord fait l'honneur d'être le président de ce jury de thèse et je dois l'avouer : j'en suis enchanté. La seconde raison est liéé à notre rencontre. Alors que j'étais en DEA son soutient et sa confiance inconditionnels ont été très valorisant. A cette époque on se sent un peu de trop dans ces séminaires où les «profs discutent de maths». Il m'a appris, à son contact, à mettre en valeur mes acquis, à avoir confiance en ses capacités. Il a su être particulièrement patient et développer mon envie de bien faire qui était noyée sous un certain amateurisme. Sa connaissance des choses mathématiques est véritablement impressionnante et je suis toujours friant de ses explications de phénomènes complexes; explications qui sont toujours, a posteriori, d'une simplicité désarmante. Je ne sais trop comment le remercier d'avoir gardé, et de toujours garder, un œil protecteur sur mon devenir. J'espère seulement que ces quelques lignes seront suffisantes pour lui exprimer toute ma gratitude et le plaisir que j'ai eu (respectivement j'aurai) à travailler (respectivement retravailler) avec lui.

Je souhaiterai remercier mes deux rapporteurs **Bruno Desprès** et **Jean-Marc Moschetta**. Le travail qu'ils ont réalisé en relisant et commentant ma thèse est très complet. Ainsi ils ont grandement contribué à épurer le texte de ces imperfections... quel doux euphémisme pour désigner les grossières erreurs mis à jour par *leurs soins !*

*La communauté des physiciens des plasmas est particulièrement bien représentée dans ce jury. Je remercie vivement **Guy Bonnaud** d'avoir fait le déplacement malgré ses fonctions au sein du CEA. Il a été le premier à me proposer de travailler sur les problèmes générés par l'interaction entre les lasers et les plasmas. Pendant presque deux années nous avons mis au point un code de calcul en essayant de marier nos compétences. De plus il a réussi la prouesse de me donner une vue globale de la physique des plasmas en un temps record. Mes préjugés sur ce monde de la physique théorique, qui me semblait rempli de «fous-géniaux», étaient clairement dénués de sens... pas parcequ'il n'y a pas de personnes «géniales» mais plutôt parceque je n'y ai pas croisé de «fou». J'ai finalement pris beaucoup de plaisir à travailler avec lui et ses collaborateurs.*
*Quant à **Vladimir Tikhontchuc** je suis heureux qu'il puisse donner son avis d'expert sur mon travail tant sa renommée et sa capacité à comprendre instantanément les choses scientifiques, sont impressionnantes. Je le remercie d'être présent et d'avoir supporté mon travail.*
*J'aimerais enfin remercier **Antoine Bourgeade**, l'un des experts du CEA/CESTA d'avoir gentillement accepté de se libérer pour participer à cette thèse.*

*Ces dernières années se sont déroulées dans le Service SIS du CEA/CESTA, plus précisement dans le Groupe GANA. Les ingénieurs-chercheurs de ce groupe m'ont permi de travailler dans des conditions très agréables et de nouer des relations amicales, je pense en particulier aux anciens **Agnès, Nicole, Muriel, Evelyne, Alain, Gérard, Thierry, Michel, Marc, Bruno**, aux ex-nouveaux **Katherine, Marina, Laurent, Fred, Nicolas** et au «petit» nouveau **David**. Je me souviens de quelques stagiaires militaires que l'armée avait eu la bonne idée de mettre en travers de mon chemin (alors que je faisais l'erreur d'aller en direction de mon bureau) comme **Benoit "Benoït", Eric "la loose", Rémi, Sébastien, Jean-Philipe "Pilou"**. Ceux-ci m'interceptaient régulièrement pour une patrouille dans la salle café ou tout autre chose que la morale réprouve.*
*Je pense aussi à mes (ex)compagnons de galère : les doctorants (la traduction politiquement correcte de thésards) **Karen, Eric, Jeff, Didier, Rodolphe, Mohamed**.*

*Un grand, grand merci à mon alter ego féminin, ma partenaire privilégiée à la fac **Céline** "ex-Closse avec un C" et **Olivier** "Bentejac avec un B", à **Crystel** "le prof que je rêvais d'avoir et que je n'ai jamais eu", à **Sandrine & Eric** "que les Dieux de la loose vous délivrent", à mes compères les myomaths **Loïc** "Der Poet", **Romain** "Don Giovanni", **Charly** "Richard $+\infty$", à **Mimi** "sa guitare et sa fiesta légendaires", à **Gégé** et "sa capacité à détruire les voitures", à **Vincent** "Bixente, plus c'est gros, plus c'est rigolo !", à **Paul R.**, au couple sulfureux **Aurélie & Laurent**, Laurent étant ce fameux **Lolo** qui a embrassé l'unique carrière mondiale de philosophe/lutteur/batteur/acteur ("Pelote-Man" 1999, "La Nuit des Publivores" 1998...).*
*J'aimerais remercier **JPK et Monique Kresser** de m'accueillir toujours avec tellement d'enthousiasme, les mois passés chez vous resteront dans mon esprit comme une véritable période de bonheur. Quant aux familles **Ducourneau/Salgado/Pratt** qui m'ont vu grandir de l'adolescence jusqu'à aujourd'hui, je leur suis reconnaissant d'être tels qu'ils sont : c'est-à-dire des gens biens que l'on est heureux de compter parmi ses amis.*
Et puis il y a ceux que je n'ai pas cité, ceux qui ont fait des passages furtifs dans ma vie mais qui y ont apporté suffisamment pour que je sois meilleur que ce que j'étais avant leur passage : qu'ils en soient remerciés.

*Enfin je remercie tout particulièrement à la famille **Barrillon** au grand complet **Armelle & Yves, Martin, Paulin, Sylvère, Théo** qui m'ont accepté comme gendre et beau-f malgré mes différences, mes défauts et mon incroyance (entre autre)... les plus perspicaces d'entre vous auront noté l'absence de leur fille (ou sœur) unique dans la liste précédente : il manque effectivement **Clotilde**, celle qui partage ma vie et mes angoisses, celle qui réalise la prouesse de rendre ma vie de plus en plus agréable. Je la remercie tendrement d'avoir été présente et d'être toujours près de moi.*

Pour finir j'adresse un grand merci à ma famille en général, à mon frère ***Johnny*** *et ma belle-sœur* ***Sophie*** *pour m'avoir donné une nièce* ***Amandine*** *et une filleule* ***Manon*** *adorables, aux Ch'tis, à ceux du 34, à mes grands-parents, à mon grand-père que je n'ai pas assez connu, et surtout à* ***mes parents*** *qui ont eu l'intelligence de me secouer quand je baissais les bras, de me pousser quand je reculais, de croire en moi quand je ne pensais par y arriver.*

Je leur dédie évidemment cette thèse en espérant qu'ils apprécient le travail que nous avons réalisé ensemble. Car si cette thèse existe, ils en sont grandement responsables. Merci à eux.

No pain, no gain

Contents

Chapter 1

Introduction

L'augmentation de la puissance informatique, les progrès de l'analyse numérique et de l'algorithmique, permettent d'étendre sans cesse le champ d'intervention de la simulation numérique. Par ailleurs la simulation, qui, il y a quelques années était principalement utilisée pour l'optimisation de projets technologiques, est maintenant mise à contribution pour aider à la modélisation de processus complexes relevant de la science fondamentale en physique, chimie, biologie...

Dans le cas d'écoulements instationnaires, une méthode numérique est fondée sur une discrétisation de l'espace et du temps. Deux grands types de formulations spatiales sont envisageables, illustrons-les par un exemple.
Supposons que nous voulions, dans un océan quelconque, mesurer le courant durant une année à l'aide de capteurs fixes ou mobiles. Comme nous ne pourront pas mesurer « tout le temps » ce qui se passe, il faut choisir un pas de temps, qui est la durée entre deux jeux de mesures, ce qui revient à dire que l'on se donne une *discrétisation temporelle.*
En ce qui concerne l'espace, si on utilise des capteurs fixes en « quadrillant » par exemple une zone cubique de l'océan, alors nous aurons mis en place ce que l'on appelle une *méthode eulérienne* : les nœuds (les capteurs) sont fixes et on mesure le flux au travers des cellules (des cubes par exemple).
Au contraire, si on utilise des capteurs mobiles, qui se déplacent en suivant les courants, en connaissant leur position d'immersion et leur position au moment du relevé nous mesurerons leur déplacement relatif, donc le courant qui les a portés. Dans ce cas nous aurons mis en place une *méthode lagrangienne* : les nœuds (les capteurs) sont en mouvement avec la matière et on mesure le parcours des cellules (des cubes à l'instant initial et des quadrangles à l'instant final).

Généralement on oppose ou on met en confrontation ces deux approches, eulériennes et lagrangiennes, alors qu'il faudrait plutôt les considérer comme complémentaires. En effet les avantages de l'une contrebalancent souvent les inconvénients de l'autre... et réciproquement.
Les méthodes numériques eulériennes ont été les plus étudiées jusqu'à présent. Elles sont réputées pour être stables[1] et relativement intelligibles car on travaille avec un repère fixe au cours du temps. Par rapport à ce repère fixe, des termes de convection de maille à maille apparaîssent dans les équations, ainsi que la diffusion numérique inhérente à cette convection. Une grande partie des travaux concernant ce type de méthode gravite autour de thèmes tel que le gain en précision ([45],[36]), la limitation de la diffusion numérique (limiteurs de pente [9], de flux [38], technique d'antidiffusion [20],...).
Les méthodes lagrangiennes sont bien moins étudiées, mais des travaux récents tendent à combler ce retard

[1] par comparaison aux méthodes lagrangiennes.

([65],[66],[62],[63],[64],[13],[35],[14]). Elles sont relativement précises car le maillage « s'adapte à l'écoulement », ainsi seule la matière est maillée. Il n'y a pas de zone « vide » comme dans une méthode eulérienne où des artifices du type problème à frontière libre doivent être imaginés (voir par exemple [34]). Mais les méthodes lagrangiennes ont la réputation d'être d'une stabilité douteuse. Cette instabilité a tendance à se développer dans de telles proportions que le calcul n'aboutit pas toujours. Une grande partie des travaux sur ces méthodes tente de les rendre plus stables, souvent au détriment de la précision. En effet la stabilité des méthodes lagrangiennes est obtenue généralement à l'aide de techniques de remaillage qui consistent à projeter l'information du maillage « tordu », sur un maillage plus régulier. Mais à chaque remaillage la précision globale de la méthode reduit sensiblement. En deux dimensions d'espace, pour des maillages composés de quadrangles certaines méthodes lagrangiennes donnent des résultats plus ou moins acceptables. Par contre pour des maillages composés de triangles, que l'on appelle encore *maillages non-structurés*, certaines méthodes lagrangiennes donnent de mauvais résultats... quand elles en donnent, puisque les instabilités numériques sont telles que des triangles se « retournent » mettant fin prématurement au calcul.

Dans un second temps, il faut mettre en pratique cette construction théorique. Il s'agit simplement de traduire les expressions mathématiques en un langage intelligible pour un ordinateur. Le programme informatique résultant s'appelle un *code de calcul*. Ce code de calcul nécessite des données initiales décrivant l'état de l'écoulement à un certain temps physique considéré comme le début de la simulation ; ces données sont généralement décrites sur un maillage de l'espace/temps. Ce maillage, lorsque l'espace physique est géométriquement complexe, est construit à l'aide d'un logiciel appelé *mailleur*.
La troisième étape de ce processus consiste à « valider » numériquement non seulement la programmation mais aussi les prédictions théoriques sur le comportement de la méthode. Cette validation est obtenue en simulant à l'aide de la méthode, une batterie de cas test dont la solution exacte est connue, ou bien a déjà été approchée par d'autres méthodes de référence. Lorsque ces étapes sont réalisées, le code de calcul est susceptible de simuler des configurations plus complexes de manière plus ou moins fiable en fonction des résultats que la méthode aura donnés lors de son étape de validation.

En formulation eulérienne il existe un type de méthode connue sous le nom « Galerkin Discontinu (GD) » ([2],[7],[3],[6],[5],[4],[27]). Bien que relativement peu utilisé, ce type de méthode possède une caractéristique intéressante : un ordre de précision théoriquement illimité. En effet sur un maillage eulérien, la matière est décrite à l'aide de polynômes continus dans les mailles, mais discontinus aux interfaces de celles-ci. Cette idée a été introduite pour permettre de représenter des solutions discontinues, comme il peut en apparaître en mécanique des fluides (onde de choc, discontinuité de contact par exemple). Le degré des polynômes est un paramètre qui permet de construire des schémas numériques d'ordre de précision élevé car la précision théorique est de l'ordre du degré des polynômes plus 1/2. Bien entendu en mécanique des fluides les méthodes de GD sont conjuguées avec des limiteurs de pentes ou de flux pour assurer la stabilité. De tels limiteurs sont assez difficiles à construire et leur coût peut devenir important lorsque l'on dépasse le degré 1 pour les polynômes de base ([1],[49],[11]).
A notre connaissance l'adaptation des méthodes de type GD en formulation de Lagrange n'avait pas encore donné lieu à beaucoup de travaux, bien qu'il nous ait semblé que ce mariage puisse avoir un certain intérêt.

Par essence les méthodes de type GD décrivent des états physiques à l'aide de polynômes discontinus par maille. Il est alors évident que la manière avec laquelle nous allons gérer ces discontinuités aux interfaces des mailles va se révéler prépondérante pour ce qui concerne le comportement général de la méthode numérique. La gestion de telles discontinuités aux interfaces de mailles est un problème ancien, relativement à la date de naissance du calcul scientifique que l'on peut placer autour des années 40. En effet dès 1959, S.Godunov dans [58] y apporte une solution et une méthode globale portant désormais son nom. Il s'agit schématiquement de décomposer la discontinuité sous la forme d'ondes acoustiques simples se déplaçant de part et d'autre de l'interface. Ces ondes laissent derrière elles un état physique intermédiaire stable ([8]). Cet état intermédiaire est déduit à partir des états physiques autour de l'interface ; il est issu de ce que l'on appelle un problème de Riemann. En

une dimension d'espace cette théorie est assez bien connue, par contre en deux dimensions d'espace, la présence de points triples (sommets de cellules triangulaires intérieures au domaine) ajoute de nombreux soucis tant théoriques que numériques. Même si des travaux sont en cours ([33], [39] par exemple) la solution au problème de Riemann vraiment multidimensionnel est complexe en théorie et inabordable en pratique.
C'est pourquoi il nous faudra y trouver une parade afin d'écrire une méthode numérique multidimensionnelle en formulation lagrangienne, fondée sur des principes du type GD. Les schémas numériques obtenus seront apparentés aux schémas de type Godunov, puisqu'un solveur de Riemann nous permettra de résoudre les problèmes rencontrés aux interfaces des mailles.

Nous nous proposons donc dans ce travail de construire une nouvelle méthode lagrangienne performante en multidimension pour des maillages non-structurés. Pour cela il est nécessaire de disposer d'une technique de remaillage qui ne nuise pas à la précision de la méthode et stabilise le schéma numérique si cela s'avère utile. Une nouvelle technique de remaillage sera donc construite de conserve avec la méthode lagrangienne. Cette technique mettra en jeu des particules numériques qui serviront non seulement pour suivre la matière dans son déplacement mais aussi comme espace discret de projection de l'information. Ainsi on sera en mesure d'effectuer des remaillages relativement simples et surtout avec un ordre de précision théoriquement aussi élevé que souhaité.

Le **chapitre 2** présente l'étude du système de la dynamique des gaz en variables de Lagrange en une, deux et trois dimensions d'espace. Dans le **chapitre 3** nous introduisons les bases des polynômes de Bernstein. La méthode numérique en une dimension d'espace est ensuite présentée (**chapitre 4**) et testée pour ce qui concerne la mécanique des fluides dans la section **5.1** du **chapitre 5**. La méthode de remaillage sera testée quant à elle en **5.2**.
Pour deux dimensions d'espace nous développons la méthode dans le **chapitre 6** pour des maillages non-structurés. Les cas tests de mécanique des fluides et de remaillage sont regroupés dans le **chapitre 7** pour ce qui concerne le 2D.
Dans un dernier chapitre (**chapitre 8**) nous appliquerons la méthode dans le cadre de l'interaction laser/plasma, dont une des parties peut-être modélisée par les équations de la dynamique des gaz auxquelles des termes sources sont ajoutés. Certains tests spécifiques de l'interaction laser/plasma ont été traités et sont présentés à la fin de ce chapitre.
Le **chapitre 9** présentera les conclusions de ce travail.

Chapter 2

Etude du système de la dynamique des gaz en variables de Lagrange

La description d'un état continu (un fluide) en mouvement est effectuée à l'aide de la donnée du vecteur vitesse $\overrightarrow{V} = (u, v, w)^t$ (en trois dimensions d'espace) et de deux quantités thermodynamiques : la pression p et la densité ρ par exemple. A l'aide d'une équation d'état on déduit toutes les autres quantités thermodynamiques. Les phénomènes physiques qui nous intéressent reposent sur les lois de conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie.
La loi de conservation de la masse du fluide dans un volume fermé fixe quelconque $\mathcal{O}$ de l'espace a la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{O}} \rho d\mathcal{O} = -\int_{\mathcal{S}} \rho \overrightarrow{V}.\vec{n} d\mathcal{S}. \tag{2.1}$$

Le premier membre représente la variation de la quantité de fluide dans le volume $\mathcal{O}$, le second la quantité de fluide qui s'écoule à travers la surface $\mathcal{S}$ de ce volume. Une formule de Green permet de passer à une intégrale de volume dans le membre de droite et d'obtenir

$$\int_{\mathcal{O}} \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\left(\rho\overrightarrow{V}\right)\right) d\mathcal{O} = 0, \tag{2.2}$$

comme le volume $\mathcal{O}$ est arbitraire, il en découle la forme différentielle de l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\left(\rho\overrightarrow{V}\right) = 0. \tag{2.3}$$

La loi de conservation de l'énergie contenue dans le volume $\mathcal{O}$ s'écrit,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{O}} \left(\rho\epsilon + \rho\frac{|\overrightarrow{V}^2|}{2}\right) d\mathcal{O} = -\int_{\mathcal{S}} \rho\overrightarrow{V}\left(\epsilon + \frac{|\overrightarrow{V}^2|}{2}\right).\vec{n} d\mathcal{S} - \int_{\mathcal{S}} p\overrightarrow{V}.\vec{n} d\mathcal{S}, \tag{2.4}$$

où $\rho\epsilon + \rho\frac{|\overrightarrow{V}^2|}{2} = \rho e$ est l'énergie totale d'une unité de volume de fluide. L'équation précédente exprime la variation de la quantité d'énergie totale dans le volume $\mathcal{O}$ comme la somme de l'énergie totale transportée par la masse fluide traversant la surface $\mathcal{S}$ et du travail produit par les forces de pression sur le fluide contenu à l'intérieur de la surface $\mathcal{S}$. La formule de Green donnant

$$\int_{\mathcal{O}} \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho e + \operatorname{div}\left(\rho e\overrightarrow{V} + p\overrightarrow{V}\right)\right) d\mathcal{O} = 0, \tag{2.5}$$

avec $\mathcal{O}$ un volume arbitraire, il en découle la forme différentielle de l'équation sur l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho e + \operatorname{div}\left(\rho e\overrightarrow{V} + p\overrightarrow{V}\right) = 0. \tag{2.6}$$

La loi de conservation de l'impulsion dans le volume $\mathcal{O}$ s'écrit,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{O}} \rho\overrightarrow{V}d\mathcal{O} = -\int_{\mathcal{S}} \Pi\vec{n}d\mathcal{S}, \tag{2.7}$$

où Π est le tenseur de densité de flux d'impulsion. D'où la forme différentielle de l'équation de l'impulsion

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\overrightarrow{V} + \operatorname{div}\Pi = 0. \tag{2.8}$$

En présence d'onde de choc ou de discontinuité de contact les grandeurs physiques varient par sauts. Il en découle alors les relations de saut dîtes de Rankine-Hugoniot où D est la vitesse de propagation de la discontinuité (les crochets indiquent la différence des valeurs des deux côtés de la discontinuité)

$$\begin{aligned}
[\rho]D - [\rho u] &= 0 && (2.9)\\
[\rho u]D - [p + \rho u^2] &= 0 && (2.10)\\
[\rho e]D - [\rho u e + p u] &= 0. && (2.11)
\end{aligned}$$

Les processus de dissipation de l'énergie par frottement interne (viscosité) ou par échange de chaleur n'ont pas été pris en compte, ce faisant l'écoulement engendré est dit adiabatique. L'expression mathématique de l'adiabaticité se traduit par l'expression de continuité pour l'entropie S. Cette équation de continuité n'est vérifiée que pour des solutions régulières. Lors de la formation de discontinuités, qui sont des solutions des équations précédentes, la dissipation ne doit pas être négligée. Comme à la traversée d'une discontinuité l'entropie d'un élément de matière croit, l'équation sur l'entropie devient en fait l'inégalité d'entropie

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho S + \operatorname{div}\left(\rho S\overrightarrow{V}\right) \geq 0, \tag{2.12}$$

que l'on pouvait déduire du second principe de la thermodynamique.
Le système de la dynamique des gaz développé en coordonnées cartésiennes ($i.e$ variables d'Euler X, Y, Z) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ \rho e\end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial X}\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2 + p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ \rho u(e + \frac{p}{\rho})\end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial Y}\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2 + p\\ \rho vw\\ \rho v(e + \frac{p}{\rho})\end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial Z}\begin{pmatrix}\rho w\\ \rho uw\\ \rho vw\\ \rho w^2 + p\\ \rho w(e + \frac{p}{\rho})\end{pmatrix} = 0, \tag{2.13}$$

$$\rho e = \rho\epsilon + \rho\frac{V^2}{2}, \qquad V^2 = |\overrightarrow{V}^2| = u^2 + v^2 + w^2, \tag{2.14}$$

l'équation d'état du fluide étant ([16])

$$p = p(\rho, e). \tag{2.15}$$

De l'identité thermodynamique, dîte relation de Gibbs ([22])

$$d\epsilon + pdV = TdS, \tag{2.16}$$

où $V = \frac{1}{\rho}$, on peut calculer la pression p et la température absolue T à l'aide des paramètres ρ et S d'après les formules

$$\begin{aligned}
p &= p(\rho, S) = -\frac{\partial\epsilon}{\partial V} && (2.17)\\
T &= T(\rho, S) = \frac{\partial\epsilon}{\partial S}. && (2.18)
\end{aligned}$$

De plus si l'équation d'état est donnée sous la forme (2.15) le système d'équation est complet sans avoir eu recours à l'entropie S, les autres quantités thermodynamiques ne seront déterminées qu'en cas de nécessité pour interpréter des résultats par exemple.
Pour certaines équations d'état, (2.15) est relativement simple, dans le cas d'un gaz thermiquement et calorifiquement parfait l'équation d'état revêt la forme :

$$p = (\gamma - 1)(\rho e - \frac{1}{2}\rho V^2), \tag{2.19}$$

où $\gamma = c_V/c_T$ est le rapport des chaleurs spécifiques.
Après avoir présenté le changement de variables menant des coordonnées eulériennes (alphabet latin X, Y, Z) aux coordonnées lagrangiennes (alphabet grec ξ, η, ζ) dans **2.1**, nous étudierons le système de la dynamique des gaz exprimé en variables de Lagrange. Nous montrerons que le système en variables de Lagrange est constitué d'un système de lois de conservation physiques, d'un système de loi(s) de conservation géométrique(s) et d'un système de compatibilité.
L'hyperbolicité du système en une dimension d'espace sera démontré dans **2.2**, puis en deux dimensions d'espace nous montrerons que le système n'est que faiblement hyperbolique dans **2.3**.
Enfin dans **2.4** nous étendrons ces résultats en trois dimensions d'espace.

2.1 Variables de Lagrange en une, deux et trois dimensions d'espace

Soient $\overrightarrow{X} = (X, Y, Z)^t$ les coordonnées eulériennes d'un point matériel se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{V}(t) = (u, v, w)^t$ au cours du temps. A l'intant initial $t = 0$ cet élément de matière se trouve au point

$$\begin{array}{l} X(t=0) = X_0 = \xi \\ Y(t=0) = Y_0 = \eta \\ Z(t=0) = Z_0 = \zeta \end{array} \iff \overrightarrow{X}(t=0) = \overrightarrow{\xi} \equiv (\xi, \eta, \zeta)^t. \tag{2.20}$$

Il est alors possible de le repérer au cours de son mouvement à l'aide de $\overrightarrow{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)^t$; ses coordonnées à l'instant initial encore appelées coordonnées lagrangiennes.
Pour tout instant $t \neq 0$ on relie les deux systèmes de coordonnées par les relations

$$\begin{array}{l} X(\overrightarrow{\xi}, t) = \xi + \int_0^t u(\overrightarrow{\xi}, s)ds \\ Y(\overrightarrow{\xi}, t) = \eta + \int_0^t v(\overrightarrow{\xi}, s)ds \\ Z(\overrightarrow{\xi}, t) = \zeta + \int_0^t w(\overrightarrow{\xi}, s)ds \end{array} \iff \overrightarrow{X}(\overrightarrow{\xi}, t) = \overrightarrow{\xi} + \int_0^t \overrightarrow{V}(\overrightarrow{\xi}, s)ds, \tag{2.21}$$

qui dérivées suivant la variable t donnent

$$\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{X}(\overrightarrow{\xi}, t) = \overrightarrow{V}(\overrightarrow{\xi}, t). \tag{2.22}$$

Soit φ la transformation de $\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ telle que pour tout t

$$\Omega(0) \overset{\varphi}{\longmapsto} \Omega(t) \tag{2.23}$$

$$\overrightarrow{\xi} \longrightarrow \varphi(\overrightarrow{\xi}, t) = \overrightarrow{X}(\overrightarrow{\xi}, t). \tag{2.24}$$

On suppose que $\Omega(0)$ est un domaine connexe de $\mathbb{R}^3$ et on appelle *matrice jacobienne* de la transformation φ, la matrice des dérivées partielles

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \partial_\xi X & \partial_\xi Y & \partial_\xi Z \\ \partial_\eta X & \partial_\eta Y & \partial_\eta Z \\ \partial_\zeta X & \partial_\zeta Y & \partial_\zeta Z \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

La transformation inverse φ^{-1} existe si et seulement si la matrice jacobienne est inversible, l'inversibilité de $\mathcal{J}$ ne dépend quant à elle que de la stricte positivité de son déterminant, encore appelé *jacobien*

$$J = \det(\varphi) = \begin{vmatrix} \partial_\xi X & \partial_\xi Y & \partial_\xi Z \\ \partial_\eta X & \partial_\eta Y & \partial_\eta Z \\ \partial_\zeta X & \partial_\zeta Y & \partial_\zeta Z \end{vmatrix}. \tag{2.26}$$

La condition

$$J(\overrightarrow{\xi}, t) \neq 0 \tag{2.27}$$

pour tout $\overrightarrow{\xi}$ et tout temps t permet d'assurer la bijectivité de la transformation φ de $\Omega(0)$ sur $\Omega(t)$. Ce faisant on définit une correspondance biunivoque entre les points de $\Omega(0)$ et ceux de $\Omega(t)$. On en déduit que si $D(0)$ est une région ouverte de $\mathbb{R}^3$ contenue dans $\Omega(0)$, alors $D(t)$ son image par la transformation φ est une région ouverte de $\mathbb{R}^3$ inclue dans $\Omega(t)$. De plus sa frontière $\partial D(t)$ est l'image de la frontière $\partial D(0)$ de $D(0)$ par cette même transformation.

Décrivons l'évolution du milieu continu à l'aide des variables lagrangiennes $\overrightarrow{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ et du temps t. Soit $\Phi = \Phi(\overrightarrow{X}, t)$ une fonction exprimée en variables eulériennes, on désigne par $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}(\overrightarrow{\xi}, t)$ son expression en variables de Lagrange, alors

$$\overline{\Phi}(\overrightarrow{\xi}, t) = \Phi\left(\varphi^{-1}\left(\overrightarrow{X}, t\right), t\right) \tag{2.28}$$

$$\Phi\left(\overrightarrow{X}, t\right) = \Phi\left(\varphi\left(\overrightarrow{\xi}, t\right), t\right). \tag{2.29}$$

La règle de dérivation des fonctions composées appliquée à $\overline{\Phi}$ donne

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial t}(\overrightarrow{\xi}, t) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial t}\right)\left(\varphi(\overrightarrow{\xi}, t), t\right), \tag{2.30}$$

ou encore

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial t}. \tag{2.31}$$

De même

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial \xi}, \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial \eta}, \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \zeta} = \frac{\partial \Phi}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial \zeta}, \tag{2.34}$$

la résolution de ce système linéaire par rapport aux $\partial_X \Phi, \partial_Y \Phi, \partial_Z \Phi$ mène à

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \partial_\xi \overline{\Phi} & \partial_\xi Y & \partial_\xi Z \\ \partial_\eta \overline{\Phi} & \partial_\eta Y & \partial_\eta Z \\ \partial_\zeta \overline{\Phi} & \partial_\zeta Y & \partial_\zeta Z \end{vmatrix} \quad ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \partial_\xi X & \partial_\xi \overline{\Phi} & \partial_\xi Z \\ \partial_\eta X & \partial_\eta \overline{\Phi} & \partial_\eta Z \\ \partial_\zeta X & \partial_\zeta \overline{\Phi} & \partial_\zeta Z \end{vmatrix} \quad ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \partial_\xi X & \partial_\xi Y & \partial_\xi \overline{\Phi} \\ \partial_\eta X & \partial_\eta Y & \partial_\eta \overline{\Phi} \\ \partial_\zeta X & \partial_\zeta Y & \partial_\zeta \overline{\Phi} \end{vmatrix}. \tag{2.35}$$

Afin d'écrire l'équation vérifiée par le jacobien considérons sa définition (2.26) et dérivons ce déterminant par rapport à la variable temporelle, alors

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \begin{vmatrix} \partial_\xi (\partial_t X) & \partial_\xi Y & \partial_\xi Z \\ \partial_\eta (\partial_t X) & \partial_\eta Y & \partial_\eta Z \\ \partial_\zeta (\partial_t X) & \partial_\zeta Y & \partial_\zeta Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \partial_\xi X & \partial_\xi (\partial_t Y) & \partial_\xi Z \\ \partial_\eta X & \partial_\eta (\partial_t Y) & \partial_\eta Z \\ \partial_\zeta X & \partial_\zeta (\partial_t Y) & \partial_\zeta Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \partial_\xi X & \partial_\xi Y & \partial_\xi (\partial_t Z) \\ \partial_\eta X & \partial_\eta Y & \partial_\eta (\partial_t Z) \\ \partial_\zeta X & \partial_\zeta Y & \partial_\zeta (\partial_t Z) \end{vmatrix}, \tag{2.36}$$

or (2.22) peut s'écrire

$$\frac{\partial X}{\partial t} = u(\overrightarrow{\xi}, t) = \overline{u} \quad , \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = v(\overrightarrow{\xi}, t) = \overline{v} \quad , \quad \frac{\partial Z}{\partial t} = w(\overrightarrow{\xi}, t) = \overline{w},$$

donc

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \begin{vmatrix} \partial_\xi \overline{u} & \partial_\xi Y & \partial_\xi Z \\ \partial_\eta \overline{u} & \partial_\eta Y & \partial_\eta Z \\ \partial_\zeta \overline{u} & \partial_\zeta Y & \partial_\zeta Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \partial_\xi X & \partial_\xi \overline{v} & \partial_\xi Z \\ \partial_\eta X & \partial_\eta \overline{v} & \partial_\eta Z \\ \partial_\zeta X & \partial_\zeta \overline{v} & \partial_\zeta Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \partial_\xi X & \partial_\xi Y & \partial_\xi \overline{w} \\ \partial_\eta X & \partial_\eta Y & \partial_\eta \overline{w} \\ \partial_\zeta X & \partial_\zeta Y & \partial_\zeta \overline{w} \end{vmatrix}. \tag{2.37}$$

En utilisant successivement (2.35) pour $\overline{\Phi}$ valant $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ dans (2.37) on remarque que

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J\frac{\partial u}{\partial X} + J\frac{\partial v}{\partial Y} + J\frac{\partial w}{\partial Z},$$

soit

$$\frac{\partial J}{\partial t} - J\mathrm{div}_X \overrightarrow{V} = 0. \tag{2.38}$$

En utilisant (2.38) et (2.31) on réécrit alors les lois de conservation (2.13) pour un fluide parfait sous la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho} J) && = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho u} J) && + J\mathrm{div}_X \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho v} J) && + J\mathrm{div}_X \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho w} J) && + J\mathrm{div}_X \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho e} J) && + J\mathrm{div}_X \left(p\overrightarrow{V}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Comme aucune confusion ne pourra être faite on omet désormais les barres sur les fonctions exprimées en variables de Lagrange et le système complet d'une manière plus compacte s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}(UJ) + J\mathrm{div}_X \overrightarrow{F}(U) = 0, \tag{2.40}$$

avec

$$U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho e, 1)^t \quad \overrightarrow{F}(U) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}, p\overrightarrow{V}, -\overrightarrow{V} \right) \tag{2.41}$$

la pression étant déduite d'une équation d'état

$$p = p(\rho, e), \tag{2.42}$$

et la position eulérienne de la vitesse du fluide

$$\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{X} = \overrightarrow{V}. \tag{2.43}$$

2.2 Système de la dynamique des gaz en variables de Lagrange en une dimension d'espace

Dans cette partie on restreint l'étude à une dimension d'espace. Soit Ω un domaine monodimensionnel borné. Tout élément de matière de Ω peut être repéré au cours du temps et de son déplacement par ses coordonnées d'Euler X, ou ses coordonnées de Lagrange ξ. Les deux jeux de coordonnées sont reliés par les relations,

$$X(\xi, t = 0) = \xi \qquad \frac{\partial}{\partial t} X(\xi, t) = u(\xi, t). \tag{2.44}$$

Le jacobien de la transformation $\xi \longrightarrow X(\xi, t)$ s'écrit simplement en 1D

$$J(\xi, t) = \frac{\partial}{\partial \xi} X(\xi, t), \tag{2.45}$$

la transformation est une bijection dès lors que $J(\xi, t)$ ne change pas de signe, or

$$J(\xi, 0) = \frac{\partial}{\partial \xi} X(\xi, 0) = 1 > 0, \tag{2.46}$$

l'existence de la transformation inverse est assurée si et seulement si pour tout t

$$J(\xi, t) > 0. \tag{2.47}$$

L'équation vérifiée par le jacobien s'obtient en considérant (2.38) en 1D, soit

$$\frac{\partial}{\partial t} J - \frac{\partial}{\partial \xi} u = 0. \tag{2.48}$$

Le système des équations de la dynamique des gaz en 1D issu de (2.40) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho J \\ \rho u J \\ \rho e J \\ J \end{pmatrix} \quad + \quad J \frac{\partial}{\partial X} \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ pu \\ -u \end{pmatrix} = 0. \tag{2.49}$$

Il est particulièrement simple en 1D d'exprimer les dérivées partielles par rapport à X en dérivées partielles par rapport à ξ car pour toute fonction scalaire A en utilisant (2.45) on déduit

$$J \frac{\partial}{\partial X} A = \frac{\partial}{\partial \xi} A. \tag{2.50}$$

(2.50) permet alors d'écrire le système de la dynamique des gaz en variable de Lagrange 1D

$$\frac{\partial U J}{\partial t} \quad + \quad \frac{\partial}{\partial \xi} F(U) = 0, \tag{2.51}$$

où

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad F = F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ pu \\ -u \end{pmatrix}, \tag{2.52}$$

en observant que les premières composantes de U et $F(U)$ correspondent à l'équation vérifiée par le jacobien, et que la pression est issue d'une équation d'état, par exemple celle des gaz parfaits[1]

$$p = (\gamma - 1)(\rho e - \frac{1}{2} \rho u^2). \tag{2.53}$$

Adoptons la définition suivante :

[1] Cela ne restreint pas la généralité de l'étude qui suit et toute équation d'état raisonnable mènerait aux mêmes conclusions.

Définition 1. *Le système de la dynamique des gaz en variables de Lagrange 1D est hyperbolique s'il existe un ensemble de quatre valeurs propres réelles et, associés à ces valeurs propres, il existe quatre vecteurs propres formant une base de* $\mathbb{R}^4$.

Afin d'étudier l'hyperbolicité du système (2.51) on le réécrit sous la forme

$$\overline{A}\frac{\partial H}{\partial t} + \overline{B}\frac{\partial H}{\partial \xi} = 0 \tag{2.54}$$

$$H = (\rho, p, u, J)^t \tag{2.55}$$

$$\overline{A} = \frac{\partial UJ}{\partial H} \quad \overline{B} = \frac{\partial F}{\partial H}, \tag{2.56}$$

avec les matrices

$$\overline{A} = \frac{\partial UJ}{\partial H} = \left(\begin{array}{ccc|c} J & 0 & 0 & \rho \\ Ju & 0 & J\rho & \rho u \\ J\frac{u^2}{2} & \frac{J}{\gamma-1} & Ju\rho & \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}u^2\rho \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{2.57}$$

$$\overline{B} = \frac{\partial F}{\partial H} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & p & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right). \tag{2.58}$$

Le problème est de trouver s'il existe des réels μ tels que la matrice $\overline{M}(\mu) = \mu\overline{A} - \overline{B}$ soit singulière, or

$$\overline{M}(\mu) = \left(\begin{array}{ccc|c} \mu J & 0 & 0 & \mu\rho \\ \mu Ju & -1 & \mu J\rho & \mu\rho u \\ \mu J\frac{u^2}{2} & \frac{\mu J}{\gamma-1} - u & \mu Ju\rho - p & \mu(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u^2) \\ \hline 0 & 0 & 1 & \mu \end{array}\right), \tag{2.59}$$

une manipulation de colonnes donne (par exemple $\overline{\overline{c}}_3 \leftarrow (-\mu\overline{c}_3 + \overline{c}_4)(-J) + \rho\overline{c}_1$, $\overline{c}_k$ est la $k$ème colonne de $\overline{M}$)

$$\overline{\overline{M}}(\mu) = \left(\begin{array}{ccc|c} \mu J & 0 & 0 & \mu\rho \\ \mu Ju & -1 & \mu J^2\rho & \mu\rho u \\ \mu J\frac{u^2}{2} & \mu\frac{J}{\gamma-1} - u & \frac{J}{\gamma-1}(\mu J\rho u(\gamma-1) - p\gamma) & \mu(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u^2) \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mu \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \overline{M}_p & \overline{M}_{pg} \\ 0 & \overline{M}_g \end{pmatrix}, \tag{2.60}$$

le système étant ainsi décomposé en
- un système de lois de conservation physiques régi par la matrice $\overline{M}_p$;
- un système de lois de conservation géométriques régi par la matrice $\overline{M}_g$;
- un système de compatibilité avec la matrice $\overline{M}_{pg}$.

Nous sommes intéressés par la nature du système décrit par la matrice $\overline{\overline{M}}(\mu)$. La décomposition précédente va nous permettre de mettre en évidence l'hyperbolicité de chaque sous-système dans **2.2.1** et **2.2.2**, et plus généralement du système complet dans **2.2.3**.

2.2.1 Lois de conservation physiques

Les valeurs propres du système physique sont les μ solutions de $\det \overline{M}_p(\mu) = 0$. Un calcul direct donne

$$\det \overline{M}_p(\mu) = \frac{\mu J^2}{\gamma - 1}\left\{\gamma p - \mu^2 J^2 \rho\right\}, \tag{2.61}$$

les valeurs propres physiques réelles valent alors

$$\mu := \mu_0 = 0 \tag{2.62}$$

$$\mu := \mu_{\pm} = \pm\frac{1}{J}\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \pm\frac{c}{J}, \tag{2.63}$$

où c est la vitesse du son. Les valeurs propres $\mu_{\pm}$ sont associées aux ondes acoustiques et μ_0 au transport, on leur associe les vecteurs propres physiques à droite tels que $\overline{M}_p(\mu)r_p(\mu) = 0$,

$$\mu = \mu_0 \quad \longrightarrow \quad r_p(\mu_0) = r_p^0 = (1,0,0)^t \tag{2.64}$$

$$\mu = \mu_{\pm} \quad \longrightarrow \quad r_p(\mu_{\pm}) = r_p^{\pm} = (0,1,\mu_{\pm}J\rho)^t\,. \tag{2.65}$$

L'ensemble des trois vecteurs propres physiques forme une base de $\mathbb{R}^3$, le système physique est donc hyperbolique.

2.2.2 Lois de conservation géométriques

Les valeurs propres du système géométrique sont les μ solutions de $\det\overline{M}_g = 0$, or $\overline{M}_g = \mu$. Seule $\mu := \mu_0 = 0$ est une valeur propre géométrique et tout vecteur de $\mathbb{R}$ est un vecteur propre géométrique : $r_g(\mu_0) = 1$. Le système de loi de conservation géométrique est évidemment hyperbolique.

2.2.3 Hyperbolicité du système complet

La forme particulière de $\overline{\overline{M}}(\mu)$ implique que

$$\det\overline{\overline{M}}(\mu) = \det\overline{M}_p(\mu)\det\overline{M}_g(\mu), \tag{2.66}$$

de ce fait l'ensemble des valeurs propres du système complet est composé de l'ensemble des valeurs propres physiques et géométriques, soit

$$\mu := \mu_0 = 0 \text{ multiplicité } 2 \tag{2.67}$$

$$\mu := \mu_{\pm} = \pm\frac{c}{J}. \tag{2.68}$$

Il s'agit de trouver les vecteurs propres du système complet dans $\mathbb{R}^4$, ce sont les vecteurs « compatibles » $d = (d_p, d_g) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant

$$\overline{\overline{M}}(\mu)d = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \overline{M}_p d_p + \overline{M}_{pg} d_g & = & 0 \\ \overline{M}_g d_g & = & 0, \end{array} \right. \tag{2.69}$$

Cas 1 : si $\mu = \mu_{\pm}$ alors $d_g = 0$ (deuxième équation de (2.69)) et le système est réduit à $\overline{M}_p d_p = 0$, d_p est le vecteur propre physique associé à la valeur propre $\mu = \mu_{\pm}$, (*ie* $r_p^{\pm}$).
Cas 2 : si $\mu = \mu_0$ alors d_g est quelconque et le système (2.69) est réduit à

$$\overline{M}_p d_p = -\overline{M}_{pg} d_g. \tag{2.70}$$

Or par définition $\overline{M}_{pg}(\mu_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et le système (2.69) pour la valeur propre $\mu_0 = 0$ revient à

$$\overline{M}_p d_p = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d_g = 0, \tag{2.71}$$

d_p est soit le vecteur nul soit le vecteur propre physique associé à la valeur propre physique (et géométrique) μ_0 (*ie* r_p^0).
Les valeurs propres et leurs vecteurs propres associés pour le système complet sont donc

$$\mu := \mu_\pm = \pm\frac{c}{J} \quad \longrightarrow \quad r(\mu_\pm) = \left(r_p^\pm, 0\right)^t \tag{2.72}$$

$$\mu := \mu_0 = 0 \text{ multiplicité } 2 \quad \longrightarrow \quad r(\mu_0) = \left(r_p^0, 1\right)^t \text{ ou } (0,0,0,1)^t, \tag{2.73}$$

les vecteurs propres forment clairement une base de $\mathbb{R}^4$, le système complet est donc hyperbolique.

Ce n'est pas tant pour la nouveauté du résultat que nous avons développé cette partie (le système de la dynamique des gaz est connu pour être hyperbolique en variable de lagrange 1D depuis bien longtemps !), mais elle met en avant une décomposition ainsi qu'une étude peu classique de ce type de système de lois de conservation. Comme aucune difficulté ne s'est présentée en 1D, on peut espérer (à tort évidemment) qu'il en sera de même en deux et trois dimensions d'espace. Nous abordons dans **2.3** ce problème.

2.3 Système de la dynamique des gaz en variables de Lagrange en deux dimensions d'espace

Rappelons le système de la dynamique des gaz en variables de Lagrange en 2D

$$\frac{\partial}{\partial t}(UJ) + J\mathrm{div}_X \overrightarrow{F}(U) \quad = \quad 0, \tag{2.74}$$

avec

$$U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho e, 1)^t \tag{2.75}$$

$$\overrightarrow{F}(U) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}, p\overrightarrow{V}, -\overrightarrow{V} \right) \qquad \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{2.76}$$

Précisons que U est un vecteur à cinq composantes dans l'espace des variables physiques. $\overrightarrow{F}(U)$ est un vecteur à deux dimensions dans l'espace $O\overrightarrow{X}\overrightarrow{Y}$. Chacune des cpmposantes du vecteur $\overrightarrow{F}(U)$ peut dépendre des cinq composantes du vecteur U. De plus à chaque composante de U on fait correspondre un seul vecteur $\overrightarrow{F}$. Plus précisement

- la première composante de U est ρ, on lui associe le premier vecteur $\overrightarrow{F}(U)$ qui est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- la deuxième composante de U est ρu, on lui associe le deuxième vecteur $\overrightarrow{F}(U)$ qui est $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$;
- la troisième composante de U est ρv, on lui associe le troisième vecteur $\overrightarrow{F}(U)$ qui est $\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$;
- la quatrième composante de U est ρe, on lui associe le quatrième vecteur $\overrightarrow{F}(U)$ qui est $\begin{pmatrix} pu \\ pv \end{pmatrix}$;
- la cinquième composante de U est 1, on lui associe le cinquième vecteur $\overrightarrow{F}(U)$ qui est $\begin{pmatrix} -u \\ -v \end{pmatrix}$.

La pression est déduite de l'équation d'état des gaz parfaits

$$p = (\gamma - 1)(\rho e - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)), \tag{2.77}$$

et la position eulérienne étant définie à l'aide de la vitesse du fluide

$$\frac{\partial}{\partial t}X = u \tag{2.78}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Y = v. \tag{2.79}$$

Il s'agit, comme dans le cas monodimensionnel, d'exprimer toutes les dérivées partielles en dérivées partielles par rapport aux variables lagrangiennes. Contrairement au cas 1D il n'existe pas de formulation simple du type (2.50) car le jacobien en 2D est une combinaison de dérivées partielles de X et Y

$$J = \begin{vmatrix} \partial_\xi X & \partial_\xi Y \\ \partial_\eta X & \partial_\eta Y \end{vmatrix} = \partial_\xi X \partial_\eta Y - \partial_\eta X \partial_\xi Y. \tag{2.80}$$

On peut cependant expliciter ce passage en remarquant que

$$\begin{aligned}
J\mathrm{div}_X \overrightarrow{F} &= J\left\{\frac{\partial}{\partial X}F_1 + J\frac{\partial}{\partial Y}F_2\right\} && (2.81)\\
&= J\left\{\frac{1}{J}\begin{vmatrix} \partial_\xi F_1 & \partial_\xi Y \\ \partial_\eta F_1 & \partial_\eta Y \end{vmatrix} + \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \partial_\xi X & \partial_\xi F_2 \\ \partial_\eta X & \partial_\eta F_2 \end{vmatrix}\right\} && (2.82)\\
&= \partial_\xi F_1 \partial_\eta Y - \partial_\eta F_1 \partial_\xi Y + \partial_\xi X \partial_\eta F_2 - \partial_\eta X \partial_\xi F_2 && (2.83)\\
&= \left(\partial_\xi F_1 \partial_\eta Y + \partial_\xi X \partial_\eta F_2\right) - \left(\partial_\eta F_1 \partial_\xi Y + \partial_\eta X \partial_\xi F_2\right), && (2.84)
\end{aligned}$$

et en posant

$$\overrightarrow{\varphi}_\perp = F_1\begin{pmatrix} \partial_\eta Y \\ -\partial_\xi Y \end{pmatrix} - F_2\begin{pmatrix} \partial_\eta X \\ -\partial_\xi X \end{pmatrix} = F_1\left(\overrightarrow{\nabla_\xi Y}\right)_\perp - F_2\left(\overrightarrow{\nabla_\xi X}\right)_\perp, \tag{2.85}$$

on a le

Lemme 1. *Pour tout vecteur $\overrightarrow{F} \in \mathbb{R}^2$ on a*

$$J\,div_X \overrightarrow{F} = div_\xi \overrightarrow{\varphi}_\perp. \tag{2.86}$$

Démonstration. Développons la divergence en ξ en prenant en compte la définition (2.85)

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_\xi \overrightarrow{\varphi}_\perp &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(F_1\partial_\eta Y - F_2\partial_\eta X\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(-F_1\partial_\xi Y + F_2\partial_\xi X\right) && (2.87)\\
&= \left(\partial_\xi F_1 \partial_\eta Y + \underbrace{F_1\partial_{\xi\eta}Y} - \partial_\xi F_2 \partial_\eta X - \overbrace{F_2\partial_{\xi\eta}Y}\right) + \left(-\partial_\eta F_1 \partial_\xi Y - \underbrace{F_1\partial_{\xi\eta}Y} + \partial_\eta F_2 \partial_\xi X + \overbrace{F_2\partial_{\xi\eta}X}\right)\\
&= \partial_\xi F_1 \partial_\eta Y - \partial_\xi F_2 \partial_\eta X - \partial_\eta F_1 \partial_\xi Y + \partial_\eta F_2 \partial_\xi X \overset{(2.84)}{=} J\mathrm{div}_X \overrightarrow{F} && (2.88)
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

□

Ainsi à l'aide des définitions

$$U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho e, 1)^t, \tag{2.89}$$

$$\overrightarrow{F}(U) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}, p\overrightarrow{V}, -\overrightarrow{V}\right), \tag{2.90}$$

$$\overrightarrow{\varphi}_\perp = F_1\left(\overrightarrow{\nabla_\xi Y}\right)_\perp - F_1\left(\overrightarrow{\nabla_\xi X}\right)_\perp, \tag{2.91}$$

on exprime le système de la dynamique des gaz en variables de Lagrange (2.92) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}(UJ) + \mathrm{div}_\xi \overrightarrow{\varphi}_\perp = 0. \tag{2.92}$$

La connaissance de $\overrightarrow{\nabla_\xi X}$ et $\overrightarrow{\nabla_\xi Y}$ est nécessaire par opposition au 1D où la valeur du jacobien était suffisante pour totalement définir le système. Le système précédent n'est pas écrit sous une forme conservative, d'ailleurs une unique loi de conservation géométrique (celle décrivant jacobien) n'est pas suffisante. Nous allons devoir introduire quatre variables supplémentaires pour décrire l'évolution du jacobien J. Pour cela adoptons les notations de W.H.Hui [65], soit

$$J = \begin{vmatrix} \partial_\xi X & \partial_\xi Y \\ \partial_\eta X & \partial_\eta Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ L & M \end{vmatrix} = AM - BL. \tag{2.93}$$

Exprimons la dérivée par rapport au temps des quantités A, B, L, M

$$\frac{\partial}{\partial t}A = \frac{\partial}{\partial t}(\partial_\xi X) = \frac{\partial}{\partial \xi}u \tag{2.94}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}L = \frac{\partial}{\partial t}(\partial_\eta X) = \frac{\partial}{\partial \eta}u \tag{2.95}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}B = \frac{\partial}{\partial t}(\partial_\xi Y) = \frac{\partial}{\partial \xi}v \tag{2.96}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}M = \frac{\partial}{\partial t}(\partial_\eta Y) = \frac{\partial}{\partial \eta}v, \tag{2.97}$$

ainsi que les expressions de $\overrightarrow{\varphi}_\perp$

$$\overrightarrow{\varphi}_\perp = \begin{pmatrix} F_1 M - F_2 L \\ -F_1 B + F_2 A \end{pmatrix}. \tag{2.98}$$

On exhibe alors une écriture sous une forme conservative du système de la dynamique des gaz en variables de Lagrange en 2D

$$\frac{\partial}{\partial t}E + \frac{\partial}{\partial \xi}F + \frac{\partial}{\partial \eta}G = 0, \tag{2.99}$$

$$E = \begin{pmatrix} \rho J \\ \rho u J \\ \rho v J \\ \rho e J \\ A \\ B \\ L \\ M \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ pM \\ -pL \\ p(uM - vL) \\ -u \\ -v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ -pB \\ pA \\ p(vA - uB) \\ 0 \\ 0 \\ -u \\ -v \end{pmatrix}, \tag{2.100}$$

$$J = AM - BL. \tag{2.101}$$

Nous allons décomposer et étudier ce système de la même manière qu'en 1D, pour cela adoptons les définitions suivantes :

Définition 2. *Le système de la dynamique des gaz en variables de Lagrange 2D sera hyperbolique s'il existe un ensemble de huit valeurs propres réelles et associés à ces valeurs propres, il existe huit vecteurs propres à droite formant une base de* $\mathbb{R}^8$.

Définition 3. *Le système de la dynamique des gaz en variables de Lagrange 2D sera faiblement hyperbolique s'il existe un ensemble de huit valeurs propres réelles <u>mais</u> il n'existe pas de vecteurs propres à droite formant une base de* $\mathbb{R}^8$.

Afin d'étudier l'hyperbolicité du système (2.99) on le réécrit sous la forme

$$\overline{A}\frac{\partial H}{\partial t}+\overline{B}\frac{\partial H}{\partial \xi}+\overline{C}\frac{\partial H}{\partial \eta}=0$$
$$H=(\rho,p,u,v,A,B,L,M)^t$$
$$\overline{A}=\frac{\partial E}{\partial H}\quad \overline{B}=\frac{\partial F}{\partial H}\quad \overline{C}=\frac{\partial G}{\partial H},$$

rappelons que

$$\rho e=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho(u^2+v^2). \tag{2.102}$$

Les matrices $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ sont alors données par

$$\overline{A}=\frac{\partial E}{\partial H}=\left(\begin{array}{cccc|cccc} J & 0 & 0 & 0 & \rho M & -\rho L & -\rho B & \rho A\\ uJ & 0 & \rho J & 0 & \rho uM & -\rho uL & -\rho uB & \rho uA\\ vJ & 0 & 0 & \rho J & \rho vM & -\rho vL & -\rho vB & \rho vA\\ \frac{1}{2}(u^2+v^2)J & \frac{J}{\gamma-1} & \rho Ju & \rho Jv & \rho eM & -\rho eL & -\rho eB & \rho eA\\ \hline 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right), \tag{2.103}$$

$$\overline{B}=\frac{\partial F}{\partial H}=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&M&0&0&0&0&0&p\\ 0&-L&0&0&0&0&-p&0\\ 0&uM-vL&pM&-pL&0&0&-pv&pu\\ \hline 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right), \tag{2.104}$$

$$\overline{C}=\frac{\partial G}{\partial H}=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-B&0&0&0&-p&0&0\\ 0&A&0&0&p&0&0&0\\ 0&-uB+vA&-pB&pA&pv&-pu&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{array}\right). \tag{2.105}$$

Le problème est de trouver, s'ils existent, des réels μ tels que la matrice $\overline{M}(\mu)=\mu\overline{A}-\alpha\overline{B}-\beta\overline{C}$ soit singulière pour tout $\alpha^2+\beta^2=1$, or

$$\overline{M}(\mu)=$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \mu J & 0 & 0 & 0 & \mu\rho M & -\mu\rho L & -\mu\rho B & \mu\rho A\\ \mu uJ & \widetilde{\alpha} & \mu\rho J & 0 & \mu\rho uM & -\mu\rho uL+\beta p & -\mu\rho uB & \mu\rho uA-\alpha p\\ \mu vJ & \widetilde{\beta} & 0 & \mu\rho J & \mu\rho vM-\beta p & -\mu\rho vL & -\mu\rho vB+\alpha p & \mu\rho vA\\ \frac{\mu J(u^2+v^2)}{2} & \frac{\mu J}{\gamma-1}+u\widetilde{\alpha}+v\widetilde{\beta} & \begin{array}{c}\mu\rho Ju\\ +p\widetilde{\alpha}\end{array} & \begin{array}{c}\mu\rho Jv\\ +p\widetilde{\beta}\end{array} & \mu\rho eM-\beta pv & -\mu\rho eL+\beta pu & -\mu\rho eB+\alpha pv & \mu\rho eA-\alpha pu\\ \hline 0&0&-\alpha&0&\mu&0&0&0\\ 0&0&0&-\alpha&0&\mu&0&0\\ 0&0&-\beta&0&0&0&\mu&0\\ 0&0&0&-\beta&0&0&0&\mu \end{array}\right) \tag{2.106}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{\alpha} & = & -\alpha M + \beta B \\ \widetilde{\beta} & = & \alpha L - \beta A. \end{array} \right. \tag{2.107}$$

L'écriture de $\overline{M}(\mu)$ sous forme triangulaire par bloc

$$\overline{\overline{M}}(\mu) = \begin{pmatrix} \overline{M}_p & \overline{M}_{pg} \\ 0 & \overline{M}_g \end{pmatrix}$$

nécessite que l'on fasse apparaitre le bloc nul, en effectuant par exemple les combinaisons linéaires suivantes sur les colonnes de $\overline{M}$ ($\overline{c}_k$ est la $k$ème colonne de $\overline{M}$) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overline{\overline{c}}_3 & \longleftarrow & (-\mu\overline{c}_3 - \alpha\overline{c}_5 - \beta\overline{c}_7)J - \rho\widetilde{\alpha}\overline{c}_1 \\ \overline{\overline{c}}_4 & \longleftarrow & (-\mu\overline{c}_4 - \alpha\overline{c}_6 - \beta\overline{c}_8)J - \rho\widetilde{\beta}\overline{c}_1 \end{array} \right. \tag{2.108}$$

$$\overline{\overline{M}}(\mu) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mu J & 0 & 0 & 0 & \mu\rho M & -\mu\rho L & -\mu\rho B & \mu\rho A \\ \mu u J & \widetilde{\alpha} & -(\mu J)\rho & 0 & \mu\rho u M & -\mu\rho u L + \beta p & -\mu\rho u B & \mu\rho u A - \alpha p \\ \mu v J & \widetilde{\beta} & 0 & -(\mu J)\rho & \mu\rho v M - \beta p & -\mu\rho v L & -\mu\rho v B + \alpha p & \mu\rho v A \\ \frac{\mu J(u^2+v^2)}{2} & \frac{\mu J}{\gamma-1} + u\widetilde{\alpha} + v\widetilde{\beta} & -(\mu J)\rho u - p\widetilde{\alpha}\frac{\gamma}{\gamma-1} & -(\mu J)\rho v - p\widetilde{\beta}\frac{\gamma}{\gamma-1} & \mu\rho e M - \beta p v & -\mu\rho e L + \beta p u & -\mu\rho e B + \alpha p v & \mu\rho e A - \alpha p u \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{array} \right). \tag{2.109}$$

Le système en 2D est ainsi décomposable en
- un système de lois de conservation physiques régi par la matrice $\overline{M}_p$;
- un système de lois de conservation géométriques régi par la matrice $\overline{M}_g$;
- un système de compatibilité avec la matrice $\overline{M}_{pg}$.

2.3.1 Lois de conservation physiques

Les valeurs propres physiques sont les réels μ solutions de $\det \overline{M}_p = 0$ or

$$\det \overline{M}_p = \frac{(\mu J)^2\rho}{\gamma - 1}\left[(\mu J)^2\rho - p\gamma(\widetilde{\alpha}^2 + \widetilde{\beta}^2)\right], \tag{2.110}$$

d'où μ est solution de (2.110) si

$$\mu \;:=\; \mu_0 = 0 \text{ multiplicité } 2 \tag{2.111}$$

$$\mu \;:=\; \mu_\pm = \pm\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}\frac{\widetilde{\alpha}^2 + \widetilde{\beta}^2}{J^2}} = \pm c\sqrt{\frac{\widetilde{\alpha}^2 + \widetilde{\beta}^2}{J^2}}, \tag{2.112}$$

où c est la célérité du son. Les valeurs propres $\mu_\pm$ sont associées aux ondes acoustiques et la valeur propre $\mu_0 = 0$ est associée aux ondes entropiques et aux ondes de vorticité. On leur associe leur(s) vecteur(s) propre(s)

physique(s) à droite tel(s) que $\overline{M}_p(\mu) r_p(\mu) = 0$.
Pour $\mu = \mu_0 = 0$, le système à résoudre est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & u\widetilde{\alpha} + v\widetilde{\beta} & -p\widetilde{\alpha}\frac{\gamma}{\gamma-1} & -p\widetilde{\beta}\frac{\gamma}{\gamma-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.113}$$

les vecteurs propres physiques associés à $\mu = \mu_0 = 0$ appartiennent donc au sous-espace vectoriel

$$S_{\mu_0} = \left\{ k\,(1,0,0,0)^t + q \left(0,0,1,-\frac{\widetilde{\alpha}}{\widetilde{\beta}}\right)^t, (k,q) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \tag{2.114}$$

On trouve, en résolvant un système du type (2.113), que les vecteurs propres physiques associés à $\mu = \mu_\pm$ appartiennent au sous-espace vectoriel

$$S_{\mu_\pm} = \left\{ k \left(0,1,\frac{\widetilde{\alpha}}{\mu_\pm J\rho},\frac{\widetilde{\beta}}{\mu_\pm J\rho}\right)^t, k \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2.115}$$

On montre alors facilement que les vecteurs propres physiques forment une base de $\mathbb{R}^4$, le système de lois de conservation physiques est donc hyperbolique.

2.3.2 Lois de conservation géométriques

La forme de $\overline{M_g}$ est particulièrement simple car :

$$M_g = \mu I_4, \tag{2.116}$$

où I_4 est la matrice identité de $\mathbb{R}^4$.
Les valeurs propres géométriques sont les μ solutions de $\det \overline{M}_g = 0$, soit

$$\mu := \mu_0 = 0 \text{ multiplicité } 4, \tag{2.117}$$

de plus tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ est vecteur propre géométrique. Il suffit de choisir la base canonique de $\mathbb{R}^4$ par exemple pour déterminer le sous-espace vectoriel engendré par μ_0.
Les vecteurs propres géométriques forment évidemment une base de $\mathbb{R}^4$, le système de lois de conservation géométriques est donc hyperbolique.

2.3.3 Hyperbolicité du système complet

De même qu'en 1D la forme particulière de $\overline{\overline{M}}$ implique que

$$\det \overline{\overline{M}}(\mu) = \det \overline{M}_p(\mu) \det \overline{M}_g(\mu), \tag{2.118}$$

de ce fait l'ensemble des valeurs propres du système complet est composé de l'ensemble des valeurs propres physiques et géométriques, soit

$$\mu := \mu_0 = 0 \text{ multiplicité } 6 \tag{2.119}$$

$$\mu := \mu_\pm = \pm c\sqrt{\frac{\widetilde{\alpha}^2 + \widetilde{\beta}^2}{J^2}}. \tag{2.120}$$

Il s'agit de trouver les vecteurs propres à droite du système complet, ce sont les vecteurs « compatibles » $d = (d_p, d_g) \in \mathbb{R}^8$ vérifiant

$$\overline{\overline{M}}(\mu)d = 0 \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \overline{M}_p d_p + \overline{M}_{pg} d_g & = & 0 \\ \overline{M}_g d_g & = & 0. \end{array} \right. \tag{2.121}$$

Cas 1 : si $\mu = \mu_\pm$ alors le système (2.121) est vérifié si $d_p = r_p^\pm$ est le vecteur propre physique associé à $\mu_\pm$ et $d_g = (0,0,0,0)^t$.
Cas 2 : si $\mu = \mu_0$ alors d_g est quelconque. Le système (2.121) consiste à trouver $d_p \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\overline{M}_p d_p = -\overline{M}_{pg} d_g. \tag{2.122}$$

d_g étant un des vecteurs de base de $\mathbb{R}^4$, or

$$\operatorname{rang}(\overline{M}_p)|_{\mu=\mu_0} = 2 \tag{2.123}$$
$$\operatorname{rang}(\overline{M}_{pg})|_{\mu=\mu_0} = 3, \tag{2.124}$$

d'où l'impossibilité de résoudre (2.121) : il n'existe *a priori* pas d'extension de tous les vecteurs propres géométriques en vecteur propre du système complet.
La diagonalisation du système complet dans $\mathbb{R}^8$ est impossible, le système complet n'est donc que faiblement hyperbolique.

Cette conclusion semble paradoxale puisque il est bien connu qu'en variables d'Euler le système de la dynamique des gaz est hyperbolique au sens fort en 2D et 3D. Le paradoxe n'est en fait qu'apparent car on a montré l'hyperbolicité forte de chacun des sous-systèmes (physique et géométrique en **2.3.1** et **2.3.2** respectivement). Seul le système complet est faiblement hyperbolique.
De plus les travaux de W.H.Hui et *al* ([65],[66]) ont montré que si le changement de variable est intermédiaire entre Euler et Lagrange,

$$\begin{array}{ccc} \Omega(0) & \overset{\varphi}{\longmapsto} & \Omega(t) \\ \overrightarrow{\xi} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{X}}(\overrightarrow{\xi}, t), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathcal{X}}(\overrightarrow{\xi}, t) & = & h\overrightarrow{V}(\overrightarrow{\xi}, t) \\ 0 \leq & h & < 1, \end{array}$$

alors le système d'équations de conservation s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}E + \frac{\partial}{\partial \xi}F_h + \frac{\partial}{\partial \eta}G_h = 0 \tag{2.125}$$

$$E = \begin{pmatrix} \rho J \\ \rho u J \\ \rho v J \\ \rho e J \\ A \\ B \\ L \\ M \end{pmatrix} \quad F_h = \begin{pmatrix} (1-h)\rho I \\ pM + (1-h)\rho u I \\ -pL + (1-h)\rho v I \\ pI + (1-h)\rho e I \\ -hu \\ -hv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_h = \begin{pmatrix} (1-h)\rho K \\ -pB + (1-h)\rho u K \\ pA + (1-h)\rho v K \\ pK + (1-h)\rho e K \\ 0 \\ 0 \\ -hu \\ -hv \end{pmatrix}, \tag{2.126}$$

$$J = AM - BL, \quad I = uM - vL, \quad K = vA - uB. \tag{2.127}$$

On montre avec les mêmes techniques que ce système est hyperbolique au sens fort; les valeurs propres sont

$$\begin{aligned}
\mu &:= \mu_0 = 0 \text{ multiplicité 4} && (2.128)\\
\mu &:= \mu_h = (1-h)\left(u\frac{\alpha M - \beta B}{J} + v\frac{-\alpha L + \beta A}{J}\right) \text{ multiplicité 2} && (2.129)\\
\mu &:= \mu_\pm = \mu_h \pm c\sqrt{\frac{\widetilde{\alpha}^2 + \widetilde{\beta}^2}{J^2}}. && (2.130)
\end{aligned}$$

La valeur propre $\mu_0 = 0$ n'a une multiplicité « que » de 4 (contre 6 dans le cas lagrangien $h = 1$) : les vecteurs propres à droite existent alors en nombre suffisant et on montre qu'ils diagonalisent le système dans $\mathbb{R}^8$.

Remarquons que le cas $h = 0$ correspond au cas de variables eulériennes, le cas $h = 1$ correspondant quant à lui au cas de variables lagrangiennes.
Il est assez surprenant de voir que pour toute valeur h, même infiniment proche de 1 on puisse montrer l'hyperbolicité alors que le cas particulier $h = 1$ mène au défaut d'hyperbolicité. Même si les fondements théoriques ne semblent pas « stables » dans le cas $h = 1$, les tests numériques effectués par W.H.Hui n'ont posé aucun problème, de plus les résultats sont identiques au cas $h = 0.999$.
Dans le cas lagrangien, les vecteurs propres manquant correspondent aux familles de caractéristiques linéairement dégénérées. Si on s'affranchit de leur utilisation dans notre méthode numérique[2], alors le problème posé par leur détermination disparaît. Lors du calcul d'un problème de Riemann par exemple, il faudra alors bannir toute méthode nécessitant la connaissance d'une base complète de vecteurs propres. Même si la base théorique pour justifier l'existence et l'unicité du problème de Riemann n'est pas certaine, le cas lagrangien $h = 1$ semble pouvoir être envisagé comme les autres.

2.4 Extension en trois dimensions d'espace

Nous avons vu que le passage de une à deux dimensions d'espace a entraîné un certain nombre de problèmes. L'extension en 3D va-t-elle apporter son lot de complications ? En fait il n'en est rien, l'extension consiste en une simple réécriture du chapitre traitant le 2D. En effet les problèmes liés à la forme du jacobien (un déterminant) sont déjà résolus. Certes il faut ajouter un certain nombre de variables supplémentaires pour prendre en compte la nouvelle donnée spatiale et donc (2.26) s'écrit en 3D

$$J = \det(\varphi) = \begin{vmatrix} \partial_\xi X & \partial_\xi Y & \partial_\xi Z \\ \partial_\eta X & \partial_\eta Y & \partial_\eta Z \\ \partial_\zeta X & \partial_\zeta Y & \partial_\zeta Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & L & P \\ B & M & Q \\ C & N & R \end{vmatrix}. \tag{2.131}$$

Le système conservatif de la dynamique des gaz en variables de Lagrange 3D est un système à 14 inconnues (5 variables physiques, 9 variables géométriques). Ces variables supplémentaires n'apportent cependant pas de difficultés outre mesure, et les mêmes conclusions se déduisent d'une étude similaire au 2D. Les sous-systèmes physiques et géométriques sont hyperboliques, et le système complet n'est que faiblement hyperbolique pour un changement de variable lagrangien.
La discussion de la fin de **2.3.3** a son équivalente en 3D, à savoir : le système complet est hyperbolique pour tout changement de variable où $h \neq 1$ mais dans le cas $h = 1$ aucun problème ne doit se présenter si on n'a pas à utiliser les vecteurs propres manquants. De plus les résultats numériques de W.H.Hui dans le cas $h = 0.999$ sont identiques à ceux obtenus pour le changement de variable lagrangien $h = 1$.
Pour ces raisons nous ne développerons pas les calculs pour trois dimensions d'espace.

[2]Ce qui sera le cas et qui est aussi le cas pour la méthode de W.H.Hui

Chapter 3

Introduction aux bases des polynômes de Bernstein mono et multidimensionnels

Ce chapitre est dédié à l'étude des bases de polynômes de Bernstein mono et multidimensionnels. On y présente outre leur définition, leurs propriétés fondamentales dans **3.1** ainsi que certains aspects des bases de Bernstein concernant les problèmes de régularisation dans **3.2**. En particulier nous étudierons les problèmes aux moments dans **3.2.1** et les problèmes de préservation de la positivité dans **3.2.2**.
La quasi totalité des résutats monodimensionnels s'étendent aisément à plusieurs dimensions d'espace. De ce fait nous restreignons notre propos à la présentation en détail du cas 1D. S'il s'avère que l'extension d'un résultat en 2D est problématique, nous préciserons dans le texte la manière de résoudre les points délicats.

3.1 Définitions et propriétés principales

Soit un ouvert $\Omega = [x_{min}; x_{max}] = [x_0; x_N]$ de $\mathbb{R}$ partitionné en $N+1$ mailles $I_{i+1/2} = [x_i; x_{i+1}]$ de taille $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, la maille ouverte étant notée $\overset{o}{I}_{i+1/2} =]x_i; x_{i+1}[$. Les coordonnées barycentriques $(\lambda_i(x), \lambda_{i+1}(x))$ d'un point x appartenant à $I_{i+1/2}$ sont :

$$\lambda_i = \quad \lambda_i(x) \quad = \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x} \tag{3.1}$$

$$\lambda_{i+1} = \quad \lambda_{i+1}(x) \quad = \frac{x - x_i}{\Delta x}, \tag{3.2}$$

remarquons que $\lambda_i + \lambda_{i+1} = 1$, ce qui nous permet de définir les bases des polynômes de Bernstein.

Définition 4. *Pour une maille $I_{i+1/2}$, on appelle base des polynômes de Bernstein d'ordre $(n) \in \mathbb{N}$, l'ensemble des $n+1$ polynômes définis dans $\mathbb{P}_n(I_{i+1/2})$ pour $0 \leq k \leq n$ par*

$$\sigma_k^{(n)}(x) = C_n^k \lambda_i^k \lambda_{i+1}^{n-k} \tag{3.3}$$

$$C_n^k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{3.4}$$

ils sont issus du développement en monômes de l'équation binomiale

$$(\lambda_i + \lambda_{i+1})^n \equiv 1. \tag{3.5}$$

Explicitons les premières bases (voir la figure 3.1).
La base des polynômes de Bernstein d'ordre (0) est :

$$\sigma^{(0)}(x) = 1. \tag{3.6}$$

La base des polynômes de Bernstein d'ordre (1) est :

$$\sigma_0^{(1)}(x) = \quad \sigma_i^+(x) \quad = \lambda_i \tag{3.7}$$
$$\sigma_1^{(1)}(x) = \quad \sigma_{i+1}^-(x) \quad = \lambda_{i+1}. \tag{3.8}$$

La base des polynômes de Bernstein d'ordre (2) est :

$$\sigma_0^{(2)}(x) = \quad \sigma_i^+(x) \quad = \lambda_i^2 \tag{3.9}$$
$$\sigma_1^{(2)}(x) = \quad \sigma_{i+1/2}(x) \quad = 2\lambda_i\lambda_{i+1} \tag{3.10}$$
$$\sigma_2^{(2)}(x) = \quad \sigma_{i+1}^-(x) \quad = \lambda_{i+1}^2. \tag{3.11}$$

La base des polynômes de Bernstein d'ordre (3) est :

$$\sigma_0^{(3)}(x) = \quad \sigma_i^+(x) \quad = \lambda_i^3 \tag{3.12}$$
$$\sigma_1^{(3)}(x) = \quad \sigma_{i+1/2}(x) \quad = 3\lambda_i^2\lambda_{i+1} \tag{3.13}$$
$$\sigma_2^{(3)}(x) = \quad \sigma_{i+3/2}(x) \quad = 3\lambda_i\lambda_{i+1}^2 \tag{3.14}$$
$$\sigma_3^{(3)}(x) = \quad \sigma_{i+1}^-(x) \quad = \lambda_{i+1}^3. \tag{3.15}$$

Remarque. *La notation* $(\sigma_0^{(n)}, \ldots, \sigma_n^{(n)})$ *sera la plus usitée dans le reste du document. On omettra souvent l'exposant des fonctions de base et* $\sigma_. \equiv \sigma_.^{(n)}$

Propriété 1. *Pour toute maille* $I_{i+1/2} = [x_i; x_{i+1}]$ *on vérifie les propriétés suivantes.*
(i) Toutes les bases de polynômes de Bernstein partitionnent l'unité.
(ii) Tous les polynômes de Bernstein sont positifs ou nuls.
(iii) Tous les polynômes de Bernstein vérifient :

$$\sigma_0^{(n)}(x_i) = 1 \quad et \quad \forall k \neq 0 \quad \sigma_k^{(n)}(x_i) = 0 \tag{3.16}$$
$$\sigma_n^{(n)}(x_{i+1}) = 1 \quad et \quad \forall k \neq n \quad \sigma_k^{(n)}(x_{i+1}) = 0. \tag{3.17}$$

(iv) Tous les polynômes d'une même base ont la même valeur d'intégrale.
(v) Tout polynôme $p(x) = \sum_{k=0}^n p_k \sigma_k^{(n)}(x)$ *défini pour* $x \in I_{i+1/2}$ *est borné par :*

$$\min_{0 \le k \le n}(p_k) \le p(x) \le \max_{0 \le k \le n}(p_k). \tag{3.18}$$

(vi) Tout polynôme $\sigma_k^{(n)}$ *est maximum au point* $x = x_i + \frac{k}{n}\Delta x$.

Démonstration. Pour toute maille $I_{i+1/2} = [x_i; x_{i+1}]$, on montre que :
(i), (ii) et (iii) sont triviales puisque la définition des polynômes de Bernstein est issue de (3.5) ;
(iv) est vraie car on vérifie facilement l'égalité :

$$\int_{I_{i+1/2}} \lambda_i^{(n-k)}(x)\lambda_{i+1}^k(x)dx = \Delta x \frac{(n-k)!\ k!}{(n+1)!}, \tag{3.19}$$

or par définition on a pour $0 \le k \le n$:

$$\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(x)dx = \int_{I_{i+1/2}} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \lambda_i^{(n-k)}(x)\lambda_{i+1}^k(x)dx = \Delta x \frac{(n-k)!\ k!}{(n+1)!} \frac{n!}{k!\ (n-k)!} = \Delta x \frac{1}{n+1} \tag{3.20}$$

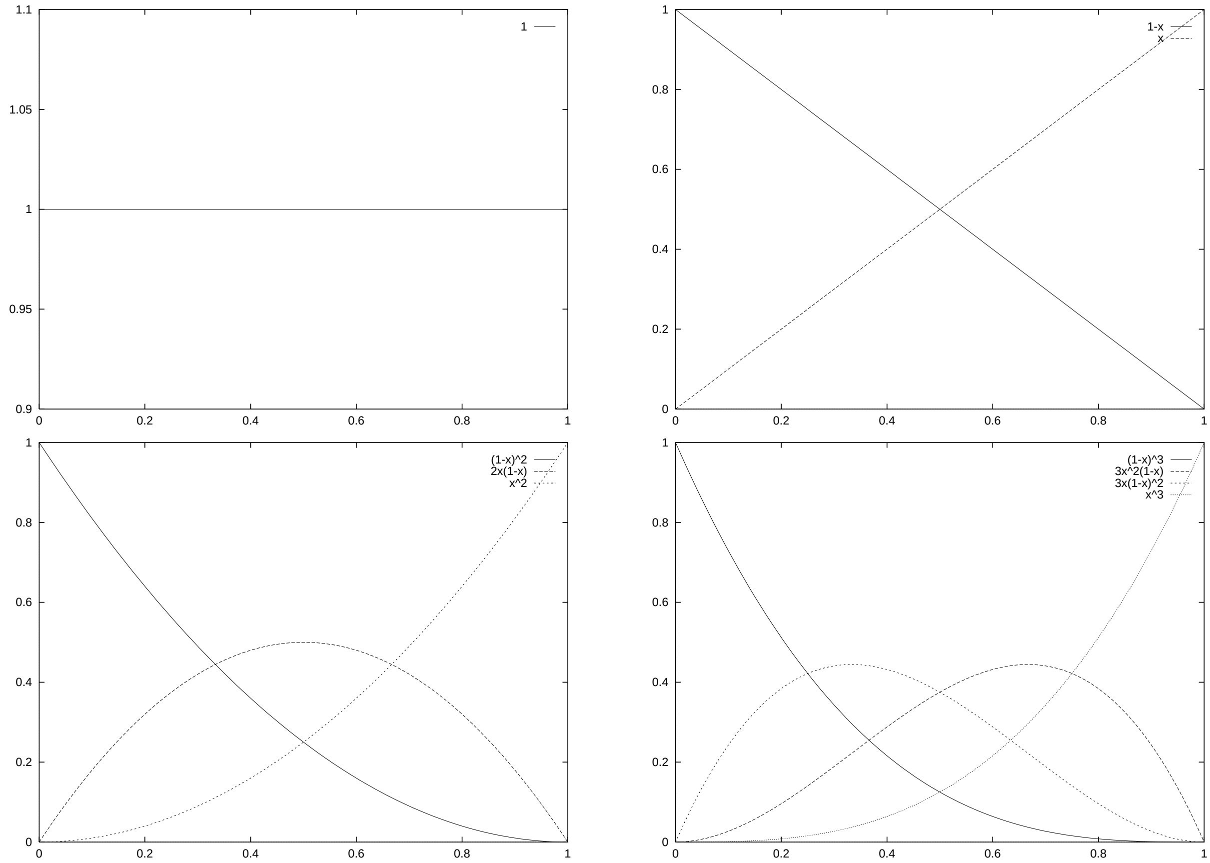


Figure 3.1: Base de polynômes de Bernstein 1D d'ordre $(0), (1), (2), (3)$

(v) s'obtient en utilisant la propriété (i) :

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k \sigma_k^{(n)}(x) \leq \max_{0\leq k\leq n}(p_k) \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sigma_k^{(n)}(x)}_{=1} \tag{3.21}$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k \sigma_k^{(n)}(x) \geq \min_{0\leq k\leq n}(p_k) \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sigma_k^{(n)}(x)}_{=1} \tag{3.22}$$

(vi) il suffit de dériver pour évaluer le maximum. On remarque qu'il n'y a pas de maximum dans $]x_i; x_{i+1}[$ pour $k = 0$ ou pour $k = n$. Dans les cas $0 < k < n$ on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma_k^{(n)}(x) = C_n^k \lambda_i^{k-1} \lambda_{i+1}^{n-k-1} \left(k\lambda_i - (n-k)\lambda_{i+1}\right), \tag{3.23}$$

qui vaut zéro lorsque $(n-k)(x-x_i) = k(x_{i+1}-x)$, soit $x = x_i + \frac{k}{n}\Delta x$. La positivité implique qu'il s'agit d'un maximum. Pour $k = 0$ le maximum est atteint en $x = x_i$ et pour $k = n$ le maximum est atteint en $x = x_{i+1}$.

□

Propriété 2. *Le kième ($k > 0$) polynôme de Bernstein de degré (n) > 0 s'exprime comme combinaison de polynômes de degré inférieur*

$$\sigma_k^{(n)}(x) = \lambda_{i+1}(x)\sigma_k^{(n-1)}(x) + \lambda_i(x)\sigma_{k-1}^{(n-1)}(x) \tag{3.24}$$

Démonstration. Pour tout $x \in I_{i+1/2}$, tout $k > 0$, et tout degré $(n) > 0$ on a

$$\begin{aligned}
\lambda_{i+1}\sigma_k^{(n-1)} + \lambda_i\sigma_{k-1}^{(n-1)} &= \lambda_{i+1}C_{n-1}^k\lambda_i^k\lambda_{i+1}^{n-1-k} + \lambda_i C_{n-1}^{k-1}\lambda_i^{k-1}\lambda_{i+1}^{(n-1)-(k-1)} \\
&= C_{n-1}^k\lambda_i^k\lambda_{i+1}^{n-k} + C_{n-1}^{k-1}\lambda_i^k\lambda_{i+1}^{(n-1)-(k-1)} \\
&= \left[C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}\right]\lambda_i^k\lambda_{i+1}^{n-k} \\
&= C_n^k\lambda_i^k\lambda_{i+1}^{n-k} \\
&= \sigma_k^{(n)}.
\end{aligned}$$

□

Avec les mêmes hypothèses on peut exprimer tout polynôme de degré $(n-1)$ comme combinaison linéaire de polynômes de degré (n).

Propriété 3. *Le kième ($k > 0$) polynôme de Bernstein de degré $(n-1) > 0$ s'exprime comme combinaison de polynômes de degré (n)*

$$\sigma_k^{(n-1)}(x) = \frac{n-k}{n}\sigma_k^{(n)}(x) + \frac{k+1}{n}\sigma_{k+1}^{(n)}(x) \tag{3.25}$$

Démonstration. Pour tout $x \in I_{i+1/2}$, tout $k > 0$ on remarque que

$$\begin{aligned}
\lambda_i\sigma_k^{(n-1)} &= \frac{C_{n-1}^k}{C_n^{i+1}}\sigma_{k+1}^{(n)}(x) = \frac{k+1}{n}\sigma_{k+1}^{(n)}(x) \\
\lambda_{i+1}\sigma_k^{(n-1)} &= \frac{C_{n-1}^k}{C_n^k}\sigma_k^{(n)}(x) = \frac{n-k}{n}\sigma_k^{(n)}(x),
\end{aligned}$$

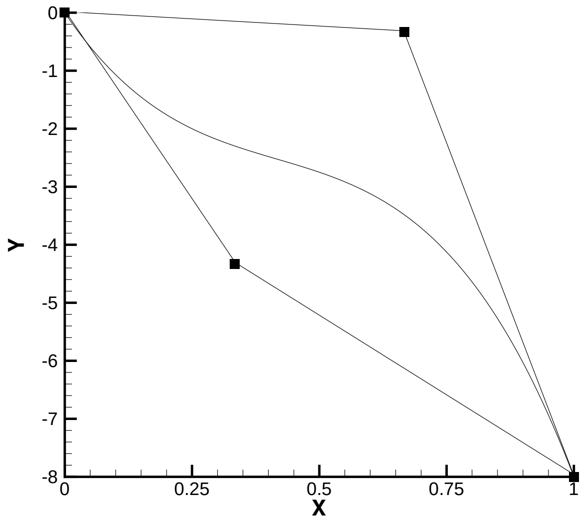


Figure 3.2: Polygone de Bernstein associé au polynôme $u(x) = -20x^3 + 25x^2 - 13x$

il suffit alors d'additionner les deux équations précédentes

$$\sigma_k^{(n-1)}(x) = C_{n-1}^k \left(\frac{1}{C_n^{i+1}} \sigma_{k+1}^{(n)}(x) + \frac{1}{C_n^k} \sigma_k^{(n)}(x) \right),$$

d'où le résultat.

$\square$

Les bases des polynômes de Bernstein sont très utilisées en CAO du fait de leurs nombreuses propriétés, en particulier la propriété d'enveloppe convexe (*convex hull*) ; tout polynôme $u \in \mathbb{P}_n(I_{i+1/2})$ est inclu dans le polygone défini par les $(n+1)$ points $\{(x_{i+k/n}; u_{i+k/n}), \quad k = 0, 1, \ldots, n\}$, où $u_{i+k/n}$ est la $(i+k/n)$ème coordonnée de Bernstein de u (voir l'exemple suivant).

Exemple. *dans* $[0;1]$ *pour le polynôme* $u(x) = -20x^3 + 25x^2 - 13x$ *le polygone est défini par l'ensemble des points (voir la figure 3.2) :*

$$\begin{array}{ccccc} u(x) = & 0\sigma_0^{(3)}(x) & -\frac{4}{3}\sigma_1^{(3)}(x) & -\frac{1}{3}\sigma_2^{(3)}(x) & -8\sigma_3^{(3)}(x) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \textit{Points} & (0;0) & (\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}) & (\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}) & (1;-8) \end{array}$$

Ces bases ont aussi la particularité d'être les bases positives partitionnant l'unité qui sont stables de manière optimale ; une perturbation sur les coordonnées d'un polynôme implique une erreur d'appréciation du polynôme cette erreur est mesurée par un nombre de conditionnement et on montre que ce nombre est minimal pour les bases de Bernstein ([56],[54],[55],[53],[60]).
Ces polynômes se retrouvent dans les définitions des courbes de Bezier, les B-splines mais aussi en probabilité ; par exemple dans $I = [0,1]$ si $0 \le x \le 1$ est la probabilité d'un événement E, alors $\sigma_k^{(n)}(x)$ est la probabilité que E se passe exactement k fois dans n tirages indépendants. S.Bernstein a introduit ces polynômes à l'origine

afin de démontrer le théorème de Weierstrass à l'aide d'arguments probabilistes (voir [57] et [19] pour un exposé plus détaillé).
Les propriétés ci-dessus vont être souvent mises à contribution tout au long du développement de la méthode numérique. Nous verrons au cours du texte qu'elles se révèlent particulièrement importantes.

3.2 Régularisation polynômiale

Tout polynôme $u \in \mathbb{P}_n(I_{i+1/2})$ est représenté de manière unique par un $(n+1)$-vecteur dans la base de Bernstein, soit :

$$(u_\cdot) = \begin{pmatrix} u_0^{(n)} \\ \vdots \\ u_n^{(n)} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow u(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k^{(n)} \sigma_k^{(n)}(x) \quad \forall x \in I_{i+1/2} \tag{3.26}$$

Nous allons dans un premier temps définir les moments d'une fonction mesurable u pour ensuite introduire $\widetilde{u}$ son polynôme régularisé (ou projeté sur $\mathbb{P}_n$) ainsi qu'un polynôme appelé (n)-diffusé et noté $\widehat{u}$.

Définition 5. *Soit $u \in L^1(I_{i+1/2})$ et $\{\sigma_k^{(n)}\}_{k=0}^n$ la base des polynômes de Bernstein d'ordre (n) dans $I_{i+1/2}$, on appelle moments de u d'ordre (n) dans Bernstein le $(n+1)$-vecteur :*

$$(M_{u,\cdot}) = \begin{pmatrix} \int_{I_{i+1/2}} u(x)\sigma_0^{(n)}(x)dx \\ \vdots \\ \int_{I_{i+1/2}} u(x)\sigma_n^{(n)}(x)dx \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

Propriété 4. *Si $u \in L^1(I_{i+1/2})$ et $u \geq 0$ alors les moments $M_{u,k}$ sont positifs ou nuls quelque soit $k = 0, 1, \ldots n$.*

Démonstration. $\sigma_k^{(n)}(x) \geq 0$ pour tout $x \in I_{i+1/2}$ et tout $k = 0, 1, \ldots n$ et par hypothèse $u(x) \geq 0$ alors $M_{u,k} \geq 0$ pour tout $k = 0, 1, \ldots n$.

□

Propriété 5. *Soit $u \in L^1(I_{i+1/2})$ alors :*

$$\sum_{k=0}^{n} M_{u,k} = \int_{I_{i+1/2}} u(x)dx \tag{3.28}$$

Démonstration. La base de polynômes $\{\sigma_k^{(n)}\}_{k=0}^n$ partitionne l'unité.

□

Afin d'illustrer notre propos nous allons tenter de résoudre le problème suivant : *comment peut-on régulariser une masse de Dirac à l'aide de polynômes ?*
Plus précisement, soit $\delta_{x_i}(x)$ une masse de Dirac positionnée en x_i dans une maille $I_{i+1/2}$ telle que $\delta_{x_i}(x_i) = 1 > 0$. Connaissant ses $k = 0, 1, 2$ moments, comment régulariser $\delta_{x_i}(x)$ par un polynôme $u_\delta(x)$ de degré 2 ?
Au moins deux méthodes s'offrent à nous en fonction de ce qui nous semble bon de préserver.

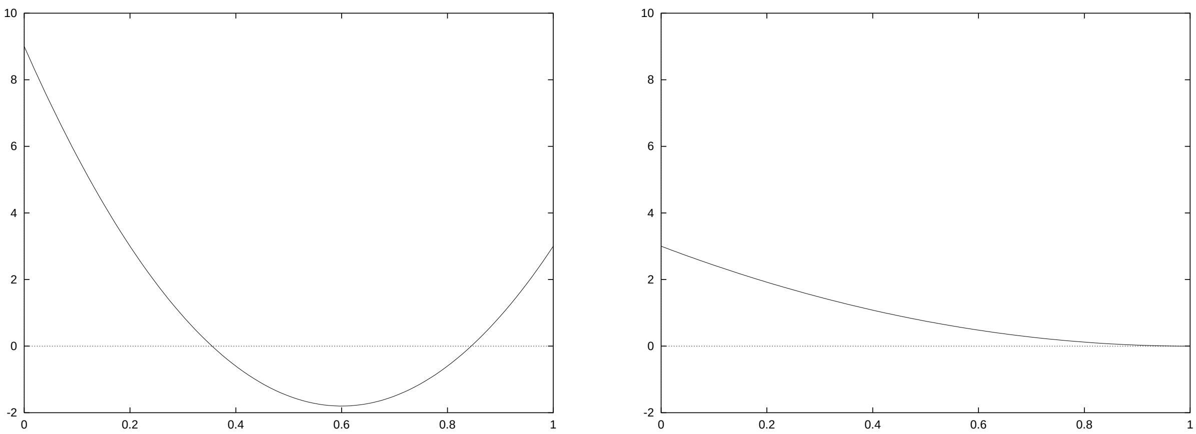


Figure 3.3: u_δ polynôme régularisé d'une masse de Dirac en 0 préservant tous les moments d'ordre (2) et $\widehat{u_\delta}$ polynôme régularisé d'une masse de Dirac en 0 préservant la positivité.

Méthode 1 : préservation de tous les moments.
On calcule les moments de la masse de Dirac

$$k=0,1,2 \quad M_{\delta,k}=\int_{I_{i+1/2}} \delta_{x_i}(x)\sigma_k^{(2)}(x)dx \quad \Longrightarrow \quad (M_{\delta,.})=(1,0,0)^t, \tag{3.29}$$

ainsi que les moments du polynôme $u_\delta(x)=\sum_{i=0}^{2} u_{\delta,i}\sigma_i^{(2)}(x)$

$$M_{u_\delta,k}=\int_{I_{i+1/2}} u_\delta(x)\sigma_k^{(2)}(x)dx=\sum_{i=0}^{2} u_{\delta,i}\int_{I_{i+1/2}} \sigma_i^{(2)}(x)\sigma_k^{(2)}(x)dx, \tag{3.30}$$

et on cherche quelles sont les coordonnées $u_{\delta,i}$ vérifiant pour tout $k=0,1,2$

$$\begin{aligned} M_{u_\delta,k} &= M_{\delta,k} && (3.31)\\ \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{2} u_{\delta,i}\int_{I_{i+1/2}} \sigma_i^{(2)}(x)\sigma_k^{(2)}(x)dx &= M_{\delta,k}, && (3.32) \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à résoudre le système linéaire

$$\Delta x \begin{pmatrix} 1/5 & 1/10 & 1/30 \\ 1/10 & 2/15 & 1/10 \\ 1/30 & 1/10 & 1/5 \end{pmatrix} (u_{\delta,.})=(M_{\delta,.}), \tag{3.33}$$

d'où

$$(u_{\delta,.})=\frac{1}{\Delta x}\begin{pmatrix} 9 & -9 & 3 \\ -9 & 21 & -9 \\ 3 & -9 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta x}\begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

$$u_\delta(x)=\frac{1}{\Delta x}\left(9\sigma_0^{(2)}(x)-9\sigma_1^{(2)}(x)+3\sigma_2^{(2)}(x)\right). \tag{3.35}$$

On remarque (voir la figure 3.3) que le polynôme u_δ n'est pas positif quand bien même la masse de Dirac l'est. Ce résultat est indépendant de la base de polynômes choisie ainsi que du degré (dès que celui-ci est supérieur ou égal à 1). Dans **3.2.1** on présente les résultats théoriques concernant cette méthode, en particulier l'existence et l'unicité de la solution pour tout degré (n).

Méthode 2 : préservation de la positivité.
On cherche le polynôme régularisé d'ordre (2) qui soit positif et qui converge vers le polynôme u_δ pour n tendant vers l'infini. Pour l'exemple particulier de la masse de Dirac on montre que ce polynôme existe et est unique par une preuve constructive, il vaut (voir la figure 3.3) :

$$\widehat{u_\delta}(x) = \frac{3}{\Delta x}\sigma_0^{(2)}(x). \tag{3.36}$$

Il existe en fait une infinité de fonctions ayant $(M_{\delta,.})$ pour moments par rapport aux bases de Bernstein. Le problème est de choisir parmi cette infinité une fonction vérifiant un certain critère. Dans la **méthode 1** le critère est *l'égalité de tous les moments* alors que le critère de la **méthode 2** est *la préservation de la positivité, de la valeur moyenne et la convergence pour toutes les normes lorsque n tend vers l'infini.* Dans les deux prochaines parties nous présentons ces deux méthodes.

3.2.1 Méthode préservant les moments

Définition 6. *Soit $u \in L^1(I_{i+1/2})$, on appelle polynôme régularisé d'ordre (n) (ou projeté sur $\mathbb{P}_n$), le polynôme $\widetilde{u} \in \mathbb{P}_n$ ayant les mêmes moments que u.*

Remarque. *Si $u \in \mathbb{P}_j(I_{i+1/2})$ pour tout $j \leq n$ alors $\widetilde{u} \equiv u$.*

Propriété 6. *Soient $u \in L^1(I_{i+1/2})$, $\widetilde{u}$ son polynôme régularisé d'ordre (n) alors $\widetilde{u}$ vérifie ;*

$$\int_{I_{i+1/2}} \widetilde{u}(x)dx = \int_{I_{i+1/2}} u(x)dx. \tag{3.37}$$

Démonstration. Par définition (définition 6) $M_{u,k} = M_{\widetilde{u},k}$ pour tout $k = 0, 1, \dots, n$ alors

$$\int_{I_{i+1/2}} \widetilde{u}(x)dx \overset{\text{Propr 5}}{=} \sum_{k=0}^{n} M_{u,k} = \sum_{k=0}^{n} M_{\widetilde{u},k} = \int_{I_{i+1/2}} u(x)dx. \tag{3.38}$$

□

Connaissant les moments $(M_{u,.})$ on calcule le polynôme $\widetilde{u}$ en inversant le système linéaire issu de :

$$\forall k = 0, 1, \dots, n \qquad M_{u,k} = \int_{I_{i+1/2}} \widetilde{u}(x)\sigma_k^{(n)}(x)dx = \sum_{j=0}^{n} \widetilde{u}_j \int_{I_{i+1/2}} \sigma_j^{(n)}(x)\sigma_k^{(n)}(x)dx \tag{3.39}$$

$$\iff \qquad (M_{u,.}) = A(\widetilde{u}_.), \tag{3.40}$$

avec la matrice A définie par :

$$A = (a_{jk})_{j,k=0,1,\dots,n} \quad \text{et} \quad a_{jk} = \int_{I_{i+1/2}} \sigma_j^{(n)}(x)\sigma_k^{(n)}(x)dx. \tag{3.41}$$

Propriété 7. *La matrice A est symétrique, définie positive et inversible.*

Démonstration. La symétrie et la positivité sont évidentes. L'inversibilité s'obtient en considérant le produit scalaire $(u,v) = \int_{I_{i+1/2}} uvdx$ et donc :

$$A = \begin{pmatrix} (\sigma_0,\sigma_0) & (\sigma_0,\sigma_1) & \cdots & (\sigma_0,\sigma_n) \\ (\sigma_1,\sigma_0) & (\sigma_1,\sigma_1) & \cdots & (\sigma_1,\sigma_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\sigma_n,\sigma_0) & (\sigma_n,\sigma_1) & \cdots & (\sigma_n,\sigma_n) \end{pmatrix}. \tag{3.42}$$

Or l'ensemble des polynômes $\{\sigma_k^{(n)}\}_{k=0}^n$ forme une base de $\mathbb{P}_n$ donc A est inversible.

□

Exemple. *Précisons la forme des matrices A et A^{-1} pour les premiers ordres :*
ordre 1 :

$$A = \Delta x \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{2}{\Delta x} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

ordre 2 :

$$A = \Delta x \begin{pmatrix} 1/5 & 1/10 & 1/30 \\ 1/10 & 2/15 & 1/10 \\ 1/30 & 1/10 & 1/5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{3}{\Delta x} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 7 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

ordre 3 :

$$A = \Delta x \begin{pmatrix} 1/7 & 1/14 & 1/35 & 1/140 \\ 1/14 & 3/35 & 9/140 & 1/35 \\ 1/35 & 9/140 & 3/35 & 1/14 \\ 1/140 & 1/35 & 1/14 & 1/7 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{4}{\Delta x} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 52/3 & -43/3 & 4 \\ 4 & -43/3 & 52/3 & -6 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

On remarque que la taille de la maille n'apparaît qu'en facteur des matrices A et A^{-1}. Cette propriété va aussi se révéler importante pour la méthode numérique puisque ces matrices n'auront pas à être assemblées pour chaque maille.

La matrice A^{-1} n'est pas positive impliquant que le polynôme régularisé d'une fonction positive u peut ne pas être positif partout. La méthode numérique que nous allons développer nécessite la détermination de polynômes positifs dès lors que tous les moments de u le sont (par exemple pour la densité ou la pression). C'est pourquoi nous introduisons la notion de polynôme (n)-diffusé d'une fonction u.

3.2.2 Méthode préservant la positivité

Définition 7. *Soit $u \in L^1(I_{i+1/2})$, on appelle polynôme (n)-diffusé de u le polynôme $\widehat{u} \in \mathbb{P}_n(I_{i+1/2})$ dont les composantes dans la base de Bernstein vérifient :*

$$\widehat{u}(x) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{u}_k \sigma_k^{(n)}(x) \tag{3.46}$$

$$\forall k = 0,1,\ldots,n \qquad \widehat{u}_k = \frac{\int_{I_{i+1/2}} u(x)\sigma_k^{(n)}(x)dx}{\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(x)dx}. \tag{3.47}$$

Propriété 8. *Soit* $u \in L^1(I_{i+1/2})$ *et* $\widehat{u}$ *son polynôme* (n)*-diffusé :*
(i) si u *est une fonction positive alors* $\widehat{u}$ *est positif.*
(ii) $\widehat{u}$ *vérifie*

$$\int_{I_{i+1/2}} \widehat{u}(x)dx = \int_{I_{i+1/2}} u(x)dx. \tag{3.48}$$

Démonstration. On a :
(i) $u(x) \geq 0$ et $\sigma_k^{(n)}(x) \geq 0$ donc pour tout k on a $\widehat{u}_k \geq 0$ car les bases de Bernstein sont positives (voir la définition de $\widehat{u}_k$ en (3.47)) ;
(ii) par définition :

$$\begin{aligned}
\int_{I_{i+1/2}} \widehat{u}(x)dx &= \sum_{j=0}^{n} \widehat{u}_j \int_{I_{i+1/2}} \sigma_j^{(n)}(x)dx \\
&= \sum_{j=0}^{n} \widehat{u}_j \frac{\Delta x}{n+1} \\
&= \frac{\Delta x}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{\int_{I_{i+1/2}} u(x)\sigma_j^{(n)}(x)dx}{\int_{I_{i+1/2}} \sigma_j^{(n)}(x)dx} \\
&= \frac{\Delta x}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{\int_{I_{i+1/2}} u(x)\sigma_j^{(n)}(x)dx}{\frac{\Delta x}{n+1}} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \int_{I_{i+1/2}} u(x)\sigma_j^{(n)}(x)dx \\
&= \int_{I_{i+1/2}} u(x)dx
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

□

L'écriture de $\widehat{u}$ est simplifiée dans la base que nous introduisons dans la propriété suivante.

Propriété 9. *Soit* $u \in \mathbb{P}_n(I_{i+1/2})$ *et* $\widehat{u}$ *son polynôme* (n)*-diffusé alors on peut écrire :*

$$\widehat{u}(x) = \sum_{i=0}^{n} u_i \Phi_i^{(n)}(x) \tag{3.49}$$

$$\Phi_i^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{n+1}{\Delta x} a_{ij} \sigma_j^{(n)}(x) \tag{3.50}$$

$$a_{ij} = \int_{I_{i+1/2}} \sigma_i^{(n)}(x)\sigma_j^{(n)}(x)dx \tag{3.51}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\widehat{u}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\widehat{u}_k\sigma_k^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\int_{I_{i+1/2}} u(x)\sigma_k^{(n)}(x)dx}{\int_{I_{i+1/2}}\sigma_k^{(n)}(x)dx}\sigma_k^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{n+1}{\Delta x}\left(\int_{I_{i+1/2}} u(x)\sigma_k^{(n)}(x)dx\right)\sigma_k^{(n)}(x) \\
&= \frac{n+1}{\Delta x}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{I_{i+1/2}}\left(\sum_{i=0}^{n} u_i\sigma_i^{(n)}(x)\right)\sigma_k^{(n)}(x)dx\right)\sigma_k^{(n)}(x) = \frac{n+1}{\Delta x}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} u_i a_{ik}\right)\sigma_k^{(n)}(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n} u_i\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n+1}{\Delta x}a_{ik}\sigma_k^{(n)}(x)\right) = \sum_{i=0}^{n} u_i\Phi_i^{(n)}(x)
\end{aligned}$$

□

Propriété 10. *Les ensembles* $\{\Phi_i^{(n)}\}_{i=0}^n$ *sont des bases de polynômes d'ordre* (n). *Ces bases sont positives, partitionnent l'unité et sont à intégrale constante.*

Démonstration. Rappelons que :

$$\Phi_i^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n}\frac{n+1}{\Delta x}a_{ij}\sigma_j^{(n)}(x), \tag{3.52}$$

$$a_{ij} = \int_{I_{i+1/2}}\sigma_i^{(n)}(x)\sigma_j^{(n)}(x)dx. \tag{3.53}$$

Chaque $\Phi_i^{(n)}$ est une combinaison linéaire des polynômes de base $\sigma_i^{(n)}$, la positivité de (3.52) est alors évidente car tous les cœfficients $\frac{n+1}{\Delta x}a_{ij}$ sont strictement positifs. La partition d'unité est vérifiée car :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\Phi_i^{(n)}(x) &= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{n+1}{\Delta x}a_{ij}\sigma_j^{(n)}(x)\right) = \sum_{j=0}^{n}\frac{n+1}{\Delta x}\left(\sum_{i=0}^{n}a_{ij}\right)\sigma_j^{(n)}(x) && (3.54)\\
&= \sum_{j=0}^{n}\frac{n+1}{\Delta x}\left(\int_{I_{i+1/2}}\sigma_j^{(n)}(x)dx\right)\sigma_j^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n}\frac{n+1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{n+1}\right)\sigma_j^{(n)}(x) && (3.55)\\
&= 1,
\end{aligned}$$

et l'intégrale de $\Phi_i^{(n)}$ vaut :

$$\begin{aligned}
\int_{I_{i+1/2}}\Phi_i^{(n)}(x)dx &= \sum_{j=0}^{n}\frac{n+1}{\Delta x}a_{ij}\int_{I_{i+1/2}}\sigma_j^{(n)}(x)dx = \sum_{j=0}^{n}\frac{n+1}{\Delta x}a_{ij}\frac{\Delta x}{n+1} && (3.56)\\
&= \sum_{j=0}^{n}a_{ij} = \int_{I_{i+1/2}}\sigma_i^{(n)}(x)dx = \frac{\Delta x}{n+1}, && (3.57)
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

□

Les bases de polynômes de Bernstein et les bases $\{\Phi_i^{(n)}\}_{i=0}^n$ sont comparables (voir la figure 3.4). Les bases $\{\Phi_i^{(n)}\}_{i=0}^n$ sont plus diffusives : un même jeu de cœfficients $u_0, u_1, \cdots, u_n$ donne deux polynômes, $\widetilde{u}$ pour les bases $\{\sigma_i^{(n)}\}_{i=0}^n$ et $\widehat{u}$ pour les bases $\{\Phi_i^{(n)}\}_{i=0}^n$, ces polynômes ont la même intégrale sur $I_{i+1/2}$ mais :

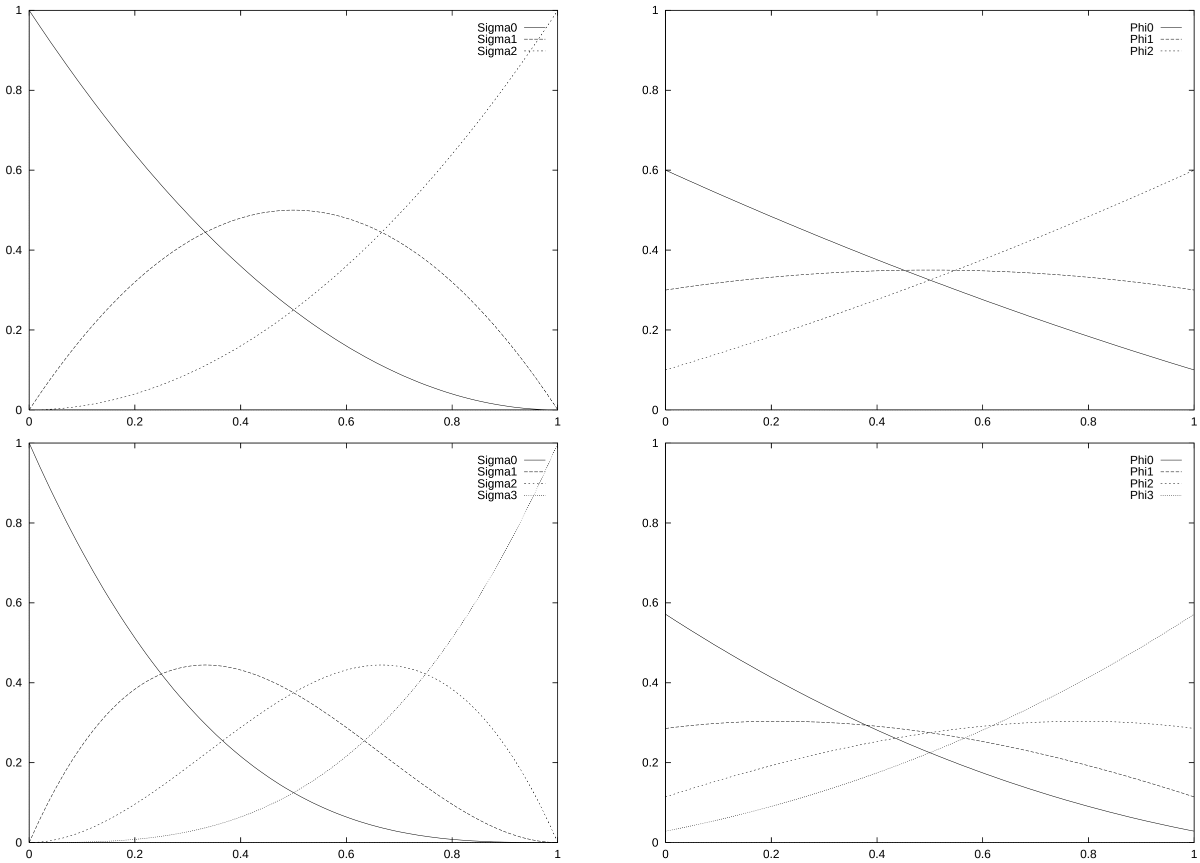


Figure 3.4: Bases de polynômes $\{\sigma_i^{(2)}\}$ et $\{\Phi_i^{(2)}\}$ (haut) et $\{\sigma_i^{(3)}\}$ et $\{\Phi_i^{(3)}\}$ (bas)

Propriété 11. *On vérifie les inégalités*

$$\begin{aligned} \| \widehat{u} \|_\infty &\leq \| \widetilde{u} \|_\infty && (3.58)\\ \| \widehat{u} \|_1 &\leq \| \widetilde{u} \|_1 && (3.59)\\ \| \widehat{u} \|_2 &\leq \| \widetilde{u} \|_2 && (3.60)\end{aligned}$$

Démonstration. Par définition on a :

$$\widetilde{u}(x) = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{u}_k \sigma_k^{(n)}(x) \tag{3.61}$$

$$\widehat{u}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\int_{I_{i+1/2}} \widetilde{u}(x)\sigma_k^{(n)}(x)dx}{\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(x)dx} \right) \sigma_k^{(n)}(x). \tag{3.62}$$

Pour la norme ∞ :

$$\forall x \in I_{i+1/2} \quad |\widehat{u}(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\int_{I_{i+1/2}} |\widetilde{u}(x)| \sigma_k^{(n)}(x)dx}{\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(x)dx} \right) \sigma_k^{(n)}(x) \leq \| \widetilde{u} \|_\infty \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(x)dx}{\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(x)dx} \right) \sigma_k^{(n)}(x)}_{\equiv 1}$$

$$\Longrightarrow \quad \| \widehat{u} \|_\infty \leq \| \widetilde{u} \|_\infty$$

Pour la norme 1 :

$$\begin{aligned} \| \widehat{u} \|_1 &= \int_{I_{i+1/2}} |\widehat{u}(x)|dx \leq \sum_{k=0}^{n} \int_{I_{i+1/2}} |\widehat{u}_k| \sigma_k^{(n)}(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{I_{i+1/2}} \left| \frac{\int_{I_{i+1/2}} \widetilde{u}(y)\sigma_k^{(n)}(y)dy}{\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(y)dy} \right| \sigma_k^{(n)}(x)dx \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| \int_{I_{i+1/2}} \widetilde{u}(y)\sigma_k^{(n)}(y)dy \right| \frac{\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(x)dx}{\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(y)dy} \leq \sum_{k=0}^{n} \int_{I_{i+1/2}} |\widetilde{u}(y)| \, \sigma_k^{(n)}(y)dy \end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\Longrightarrow \quad \| \widehat{u} \|_1 \leq \| \widetilde{u} \|_1$$

Pour la norme 2, deux arguments sont nécessaires

$$\forall x \in I_{i+1/2} \quad |\widehat{u}(x)|^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} \widehat{u}_k \sigma_k^{(n)}(x) \right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n} \widehat{u}_k^2 \sigma_k^{(n)}(x) \right) \left(\sum_{k=0}^{n} \sigma_k^{(n)}(x) \right) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{u}_k^2 \sigma_k^{(n)}(x)$$

$$\text{et} \quad \widehat{u}_k^2 = \left(\frac{\int_{I_{i+1/2}} \widetilde{u}(x)\sigma_k^{(n)}(x)dx}{\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(x)dx} \right)^2 \leq \frac{\left(\int_{I_{i+1/2}} \widetilde{u}(x)^2 \sigma_k^{(n)}(x)dx \right) \left(\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(x)dx \right)}{\left(\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(x)dx \right)^2},$$

de ce fait

$$\begin{aligned} \forall x \in I_{i+1/2} \quad |\widehat{u}(x)|^2 &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\int_{I_{i+1/2}} \widetilde{u}(x)^2 \sigma_k^{(n)}(x)dx \right) \left(\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(x)dx \right)}{\left(\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(x)dx \right)^2} \sigma_k^{(n)}(x) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\int_{I_{i+1/2}} \widetilde{u}(x)^2 \sigma_k^{(n)}(x)dx}{\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(x)dx} \sigma_k^{(n)}(x). \end{aligned} \tag{3.64}$$

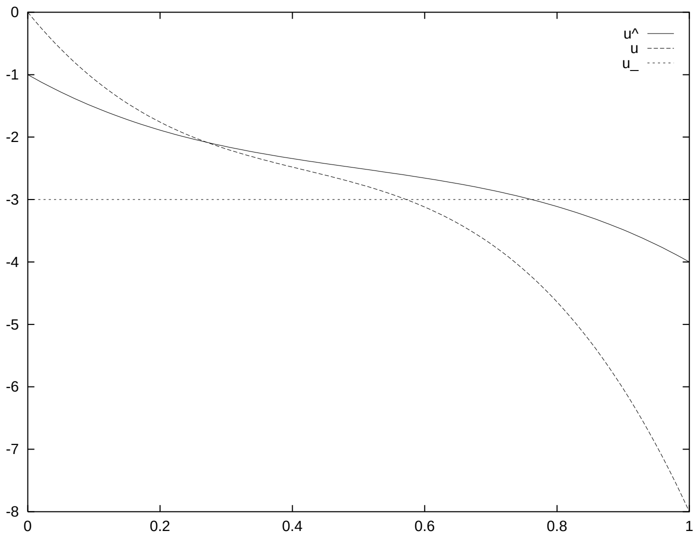


Figure 3.5: $\widehat{u}$ polynôme (3)-diffusé de $\widetilde{u}(x) = -20x^3 + 25x^2 - 13x$ et leur valeur moyenne $\overline{u}$

L'intégration en espace donne le résultat car

$$\| \widehat{u} \|_2^2 = \int_{I_{i+1/2}} |\widehat{u}(y)|^2 dy \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{\int_{I_{i+1/2}} \widetilde{u}(x)^2 \sigma_k^{(n)}(x)dx}{\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(x)dx} \int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(y)dy = \| \widetilde{u} \|_2^2 \tag{3.65}$$

ce qui termine la preuve.

□

Exemple. *Plaçons-nous dans le cas de polynômes d'ordre* (3) *et comparons* $\widetilde{u}(x) = -20x^3 + 25x^2 - 13x$, $\widehat{u}$ *son polynôme* (3)*-diffusé ainsi que leur valeur moyenne commune notée* $\overline{u}$*. Cette situation est illustrée par la figure 3.5 où tout polynôme de type* σ $(\widetilde{u}(x))$ *a son équivalent* Φ $(\widehat{u})$ *« écrasé » vers la moyenne commune. C'est pourquoi le terme de polynôme diffusé a été adopté.*

Nous avons montré comment construire ces polynômes $\widehat{u}$, mais il nous reste à répondre à la question : *dans quelle mesure le polynôme $\widehat{u}$ est une approximation raisonnable de la fonction u ?*
Avant de donner un élément de réponse montrons quelques résultats préliminaires. Par définition on peut écrire

$$\begin{aligned}\widehat{u}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \widehat{u}_k \sigma_k^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\int_{I_{i+1/2}} u(y)\sigma_k^{(n)}(y)dy}{\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(y)dy} \sigma_k^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{\Delta x} \left(\int_{I_{i+1/2}} u(y)\sigma_k^{(n)}(y)dy \right) \sigma_k^{(n)}(x) = \\ &= \int_{I_{i+1/2}} u(y) \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{\Delta x} \sigma_k^{(n)}(y)\sigma_k^{(n)}(x) \right) dy,\end{aligned}$$

d'où la nouvelle écriture de $\widehat{u}$ pour tout $x \in I_{i+1/2}$

$$\widehat{u}(x) = \int_{I_{i+1/2}} u(y) K_n(x, y) dy, \tag{3.66}$$

où K_n est le noyau de régularisation

$$\forall x \in I_{i+1/2} \quad \forall y \in I_{i+1/2} \qquad K_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{\Delta x} \sigma_k^{(n)}(y)\sigma_k^{(n)}(x), \tag{3.67}$$

vérifiant

Propriété 12. *Soit le noyau de régularisation défini par (3.67) alors*

$$(i) \quad 0 \leq K_n(x,y) \leq \frac{n+1}{\Delta x} \text{ pour tout } x \in I_{i+1/2}, \quad y \in I_{i+1/2}. \tag{3.68}$$

$$(ii) \quad \int_{I_{i+1/2}} K_n(x,y)dx = \int_{I_{i+1/2}} K_n(x,y)dy = 1. \tag{3.69}$$

Démonstration.
(i) Les polynômes de Bernstein sont positifs et partitionnent l'unité d'où le résultat.
(ii) On a

$$\int_{I_{i+1/2}} K_n(x,y)dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{\Delta x}\sigma_k^{(n)}(y) \int_{I_{i+1/2}} \sigma_k^{(n)}(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{\Delta x}\sigma_k^{(n)}(y)\frac{\Delta x}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k^{(n)}(y) = 1,$$

de même pour la variable y.

□

Dans la figure 3.6 sont tracés les quatre premiers noyaux : K_n, $n = 1, \ldots, 4$. Dans la suite nous nous restreignons au carré $[0;1] \times [0;1]$ sans perte de généralité. L'équation (3.66) est appelée intégrale singulière, et concernant les intégrales singulières nous avons le résultat important suivant ([67])

Lemme 2. *Supposons qu'un noyau quelconque $Q_n(x,y)$ vérifie sur le carré $(x,y) \in [0;1] \times [0;1]$*

$$(i) \quad Q_n(x,y) \geq 0 \quad 0 \leq x, y \leq 1, \tag{3.70}$$

$$(ii) \quad \int_0^1 Q_n(x,y)dy \xrightarrow{n \mapsto +\infty} 1, \tag{3.71}$$

$$(iii) \quad \int_{|y-x|>\delta} Q_n(x,y)dy \xrightarrow{n \mapsto +\infty} 0, \tag{3.72}$$

pour tout $\delta > 0$, les convergences dans $(ii), (iii)$ étant uniformes pour $x \in [a,b] \subset [0,1]$. Alors si $f(x)$ est continue sur $[0,1]$,

$$\widehat{f}(x) = \int_0^1 f(y)Q_n(x,y)dy \xrightarrow{n \mapsto +\infty} f(x), \tag{3.73}$$

uniformément pour $x \in [a,b]$.

Démonstration. Soient f une fonction continue et $\epsilon > 0$, on choisit $\delta > 0$ tel que $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ lorsque $a \leq x \leq b \;\; |y - x| < \delta$. Alors on a

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(x) - f(x)| &= |\int_0^1 Q_n(x,y)\,[f(y) - f(x)]\,dy| && (3.74)\\
&\leq \int_0^1 Q_n(x,y)|f(y) - f(x)|dy && (3.75)\\
&\leq \int_{x-\delta}^{x+\delta} Q_n(x,y)|f(y) - f(x)|dy + \int_{|y-x|>\delta} Q_n(x,y)|f(y) - f(x)|dy && (3.76)\\
&\leq \epsilon \int_{x-\delta}^{x+\delta} Q_n(x,y)dy + \int_{|y-x|>\delta} Q_n(x,y)|f(y) - f(x)|dy, && (3.77)
\end{aligned}$$

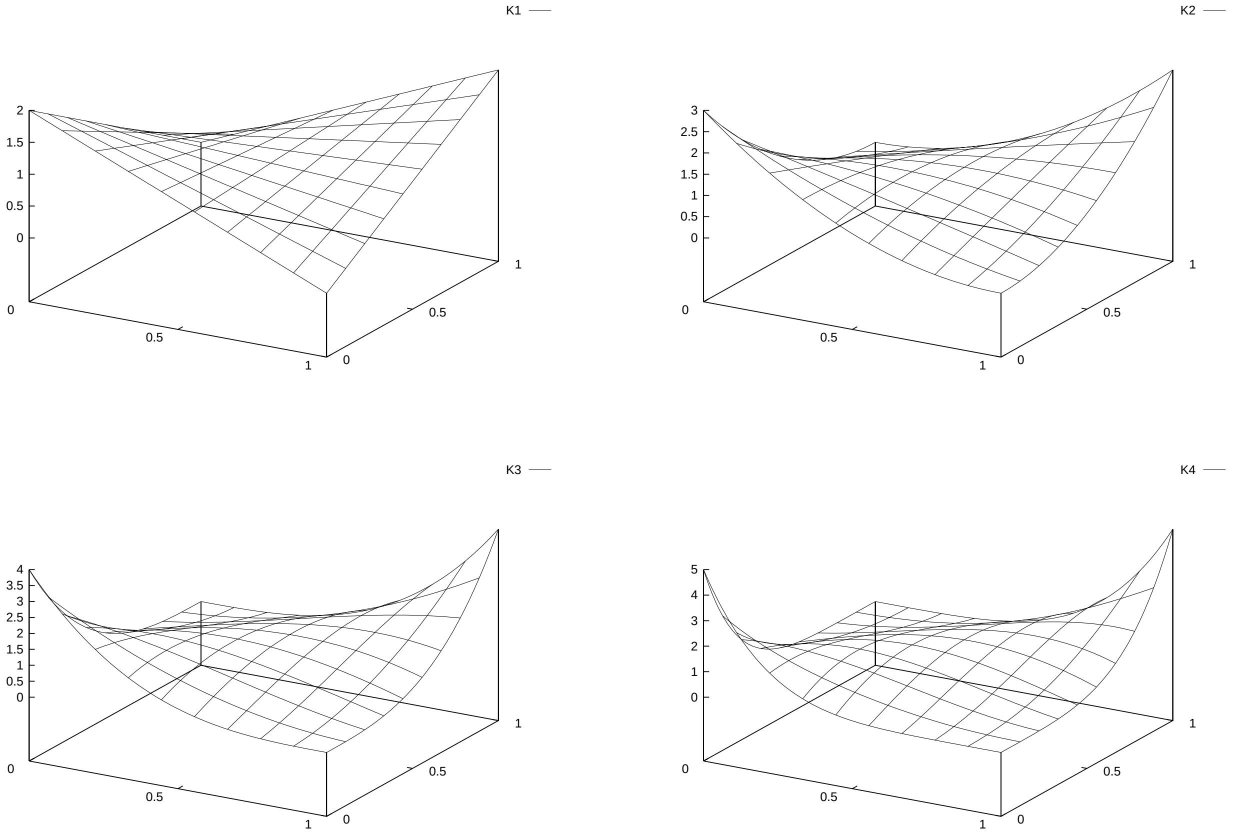


Figure 3.6: Noyaux de régularisation K_n pour $(x, y) \in [0; 1] \times [0; 1]$.

donc

$$|\widehat{f}(x) - f(x)| \xrightarrow{n \mapsto +\infty} \epsilon, \tag{3.78}$$

d'où le résultat.

□

Il s'agit de vérifier les trois hypothèses du **lemme 2** pour notre noyau de régularisation $K_n(x,y)$ et nous montrerons que $\widehat{u}$ tend uniformément vers u lorsque n tend vers l'infini.
• *Hypothèse* (i) *:* $K_n(x,y) \geq 0$ par définition.
• *Hypothèse* (ii) *:* nous l'avons vérifiée dans la **propriété 12** (équation (3.69)).
• *Hypothèse* (iii) *:* montrons que $\int_{|y-x|>\delta} K_n(x,y)dy \xrightarrow{n \mapsto +\infty} 0$.

Lemme 3. *Soit* $|y-x| > \epsilon$ *et* $(x,y) \in [0;1] \times [0;1]$ *alors le noyau de régularisation* K_n *vérifie*

$$K_n(x,y) \xrightarrow{n \mapsto +\infty} 0. \tag{3.79}$$

Démonstration. [1] Soit $0 < \epsilon < 1$ fixé. Par définition on a

$$K_n(x,y) = \sum_{k \in N} (n+1)\sigma_k^{(n)}(y)\sigma_k^{(n)}(x), \tag{3.80}$$

(on omettra désormais les exposant (n)) où

$$N \quad = \quad \{k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq n\}. \tag{3.81}$$

Comme tout polynôme de Bernstein $\sigma_k(x)$ est maximum au point $x = k/n$ (voir la propriété 1), on définit alors trois ensembles d'indices pour $|y-x| > \epsilon$

$$I_n(x) \quad = \quad \left\{k \in \mathbb{N}, \quad |x - \frac{k}{n}| < \frac{\epsilon}{2}\right\}, \tag{3.82}$$

$$I_n(y) \quad = \quad \left\{k \in \mathbb{N}, \quad |y - \frac{k}{n}| < \frac{\epsilon}{2}\right\}, \tag{3.83}$$

$$R_n \quad = \quad N - I_n(x) - I_n(y). \tag{3.84}$$

Remarquons que $I_n(x) \bigcap I_n(y) = \emptyset$, ainsi on peut décomposer la somme sur les indices de $k \in N$ dans (3.80), en trois sommes sur $I_n(x)$, $I_n(y)$ et R_n.
Nous allons chercher à majorer $(n+1)\sigma_k(y)\sigma_k(x)$ sur $I_n(y)$ (et $I_n(x)$ par symétrie), en faisant une différence entre $0 < k < n$ et $k = 0, k = n$.
[A] Soit $0 < k < n$ alors une manipulation de $\sigma_k(x)$ donne

$$\sigma_k(x) \quad = \quad C_n^k (1-x)^{n-k} x^k = C_n^k \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k} \left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{1-x}{1-\frac{k}{n}}\right)^{n-k} \left(\frac{x}{\frac{k}{n}}\right)^k \tag{3.85}$$

$$\quad = \quad M_{k,n} \left(\frac{1-x}{1-\frac{k}{n}}\right)^{n-k} \left(\frac{x}{\frac{k}{n}}\right)^k, \tag{3.86}$$

[1] Merci à A.Y.Le Roux qui a donné l'essentiel des clés pour arriver à prouver ce résultat.

où $M_{k,n}$ est borné. Prenons le logarithme de cette équation, alors

$$\ln(\sigma_k(x)) = \ln(M_{k,n}) + (n-k)\ln\left(\frac{1-x}{1-\frac{k}{n}}\right) + k\ln\left(\frac{x}{\frac{k}{n}}\right) \tag{3.87}$$

$$= \ln(M_{k,n}) + n\left\{(1-\frac{k}{n})\ln\left(\frac{1-x}{1-\frac{k}{n}}\right) + \frac{k}{n}\ln\left(\frac{x}{\frac{k}{n}}\right)\right\}. \tag{3.88}$$

Paçons-nous sur $|x-y| > \epsilon$ et pour des indices $k \in I_n(y)$, c'est-à-dire tels que $|y-\frac{k}{n}| < \frac{\epsilon}{2}$, alors $x \geq \frac{k}{n}+\frac{\epsilon}{2}$ ou bien $x \leq \frac{k}{n}-\frac{\epsilon}{2}$. Le polynôme $\sigma_k(x)$ réalisera son maximum sur cet ensemble pour $x_0^+ = \frac{k}{n}+\frac{\epsilon}{2}$ ou $x_0^- = \frac{k}{n}-\frac{\epsilon}{2}$.
Cas 1 : le maximum est atteint en $x_0 = x_0^+$

$$\ln(\sigma_k(x_0)) = \ln(M_{k,n}) + n\left\{(1-\frac{k}{n})\ln\left(1+\frac{\epsilon}{2(1-\frac{k}{n})}\right) + \frac{k}{n}\ln\left(1-\frac{\epsilon}{2\frac{k}{n}}\right)\right\}. \tag{3.89}$$

Posons $\xi = \frac{k}{n}$ et

$$F(\xi) = (1-\xi)\ln\left(1+\frac{\epsilon}{2(1-\xi)}\right) + \xi\ln\left(1-\frac{\epsilon}{2\xi}\right), \tag{3.90}$$

la dérivée de cette fonction est

$$F'(\xi) = \ln\left(1+\frac{\xi-\epsilon/2}{1-\xi+\epsilon/2}\right) + \frac{\epsilon}{2(\xi-\epsilon/2)}\left(\frac{1}{1-\xi+\epsilon/2}\right), \tag{3.91}$$

on remarque que (voir la figure 3.7)

ξ	$0 \longrightarrow 1/2$	$1/2 \longrightarrow 1$
$F'(\xi)$	$+$	$-$
$F(\xi)$	$\nearrow$	$\searrow$

donc $F(\xi) \leq F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\ln(1-\epsilon^2) < 0$ pour tout $0 < \xi < 1$, d'où

$$\ln(\sigma_k(x)) \leq \ln(M_{k,n}) + \frac{n}{2}\ln(1-\epsilon^2) \xrightarrow{n\mapsto+\infty} -\infty \tag{3.92}$$

$$\Longrightarrow 0 \leq \sigma_k(x) \leq C_n^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}\left(\frac{k}{n}\right)^k(1-\epsilon^2)^{n/2} = E_n^*(\epsilon) \xrightarrow{n\mapsto+\infty} 0 \tag{3.93}$$

Cas 2 : soit $x_0 = x_0^-$ alors pour les mêmes raisons on obtient

$$\ln(\sigma_k(x_0)) = \ln(M_{k,n}) + n\left\{(1-\frac{k}{n})\ln\left(1-\frac{\epsilon}{2(1-\frac{k}{n})}\right) + \frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{\epsilon}{2\frac{k}{n}}\right)\right\}, \tag{3.94}$$

et on pose

$$F(\xi) = (1-\xi)\ln\left(1-\frac{\epsilon}{2(1-\xi)}\right) + \xi\ln\left(1+\frac{\epsilon}{2\xi}\right), \tag{3.95}$$

l'étude de la fonction mène aux mêmes conclusions, soit

$$0 \leq \sigma_k(x) \leq C_n^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}\left(\frac{k}{n}\right)^k(1-\epsilon^2)^{n/2} = E_n^*(\epsilon) \xrightarrow{n\mapsto+\infty} 0. \tag{3.96}$$

[B] soit $k = 0$ alors

$$\sigma_0(x) = (1-x)^n, \tag{3.97}$$

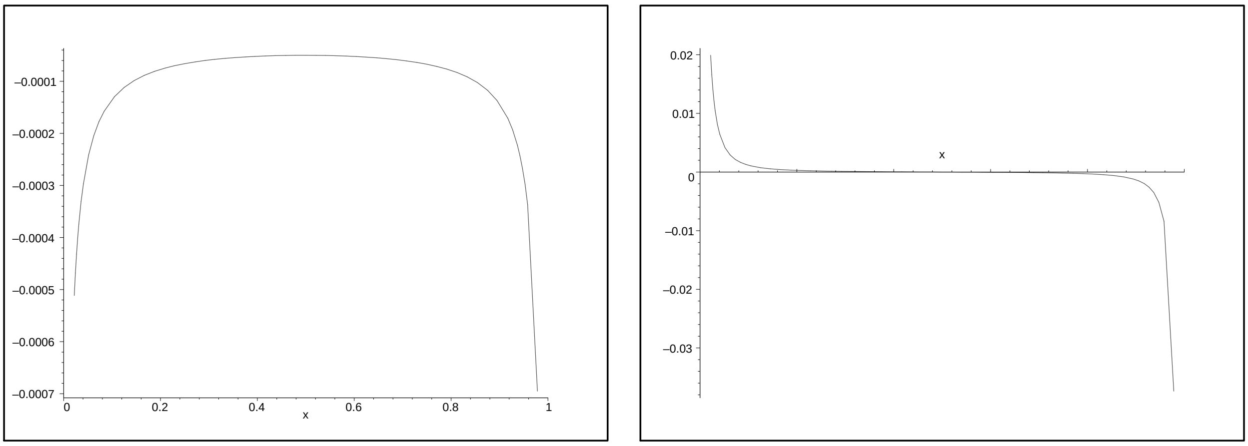


Figure 3.7: Fonction $F(\xi)$ et sa dérivée $F'(\xi)$ pour $\epsilon = 0.01$.

pour $|x-y| > \epsilon$ sur l'ensemble $I_n(y)$ $y < \epsilon/2$, alors nécessairement $x > 3\epsilon/2$, le polynôme σ_0 réalise son maximum en $x_0 = 3\epsilon/2$ et

$$\sigma_0(x) \leq \left(1 - \frac{3\epsilon}{2}\right)^n = E_n^o(\epsilon) \xrightarrow{n \mapsto +\infty} 0, \tag{3.98}$$

de même dans le cas $k = n$, on trouve

$$\sigma_n(x) \leq \left(1 - \frac{3\epsilon}{2}\right)^n = E_n^o(\epsilon) \xrightarrow{n \mapsto +\infty} 0. \tag{3.99}$$

La conclusion partielle s'exprime ainsi,
• si $|x-y| > \epsilon$ et pour des indices $k \in I_n(y)$, si $x \geq \frac{k}{n} + \frac{\epsilon}{2}$ ou bien $x \leq \frac{k}{n} - \frac{\epsilon}{2}$ alors $\sigma_k(x) \leq E_n(\epsilon) \xrightarrow{n \mapsto +\infty} 0$, où $E_n(\epsilon) = \max(E_n^o, E_n^*)$.
Pour des raisons de symétries évidentes on a aussi
• si $|x-y| > \epsilon$ et pour des indices $k \in I_n(x)$, si $y \geq \frac{k}{n} + \frac{\epsilon}{2}$ ou bien $y \leq \frac{k}{n} - \frac{\epsilon}{2}$ alors $\sigma_k(y) \leq E_n(\epsilon) \xrightarrow{n \mapsto +\infty} 0$, où $E_n(\epsilon) = \max(E_n^o, E_n^*)$.

Il nous reste à majorer $(n+1)\sigma_k(x)\sigma_k(y)$ sur les indices de R_n pour $|x-y| > \epsilon$; x et y sont « assez » loin l'un de l'autre et chacun est au moins à la distance $\frac{\epsilon}{2}$ de $\frac{k}{n}$. Or le maximum de $(n+1)\sigma_k(x)\sigma_k(y)$ est réalisé pour $x = y = \frac{k}{n}$. Dans le domaine qui nous intéresse le maximum sera alors réalisé pour

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{k}{n} + \frac{\epsilon}{2} \\ y = \frac{k}{n} - \frac{\epsilon}{2} \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{k}{n} - \frac{\epsilon}{2} \\ y = \frac{k}{n} + \frac{\epsilon}{2} \end{array} \right. \quad \text{si} \quad k \neq 0, k \neq n \tag{3.100}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \epsilon \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x = \epsilon \\ y = 0 \end{array} \right. \quad \text{si} \quad k = 0 \tag{3.101}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 1 \\ y = 1 - \epsilon \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{c} x = 1 - \epsilon \\ y = 1 \end{array} \right. \quad \text{si} \quad k = n \tag{3.102}$$

en prenant en compte ce qui a été fait précédemment on se convainc facilement que pour ce dernier ensemble d'indices on a aussi

$$\sigma_k(x) \leq E_n(\epsilon) \text{ et } \sigma_k(y) \leq E_n(\epsilon). \tag{3.103}$$

Ainsi on obtient la majoration suivante

$$\begin{aligned}
K_n(x,y) &= \sum_{k\in I_n(x)} (n+1)\sigma_k(y)\sigma_k(x) + \sum_{k\in I_n(y)} (n+1)\sigma_k(y)\sigma_k(x) + \sum_{k\in R_n} (n+1)\sigma_k(y)\sigma_k(x) \\
&\leq E_n(\epsilon) \underbrace{\sum_{k\in I_n(x)} (n+1)\sigma_k(y)}_{n\epsilon \text{ termes}} + E_n(\epsilon) \underbrace{\sum_{k\in I_n(y)} (n+1)\sigma_k(x)}_{n\epsilon \text{ termes}} + E_n(\epsilon) \underbrace{\sum_{k\in R_n} (n+1)\sigma_k(y)}_{(n+1-2n\epsilon) \text{ termes}} && (3.104) \\
&\leq (n+1)E_n(\epsilon)\left(n\epsilon + n\epsilon + (n+1-2n\epsilon)\right) && (3.105) \\
&\leq (n+1)^2\ E_n(\epsilon), && (3.106)
\end{aligned}$$

comme $E_n(\epsilon)$ est de la forme $(1-\epsilon^2)^{n/2}$ ou $\left(1-\frac{3\epsilon}{2}\right)^n$ pour tout $|x-y|>\epsilon$, alors le résultat est acquis, à savoir : pour $|y-x|>\epsilon$ et $(x,y)\in[0;1]\times[0;1]$ alors

$$K_n(x,y) \xrightarrow{n\mapsto+\infty} 0.$$

□

Ainsi les trois hypothèses sont vérifiées par le noyau K_n, alors le **lemme 2** est valide signifiant que $\widehat{u}$ tend uniformément vers u lorsque n tend vers l'infini. On montre aussi le résultat suivant sur la convergence en norme L^p.

Lemme 4. *Soit $f\in L^p$ $(1\leq p<+\infty)$ alors l'intégrale singulière*

$$\widehat{f}_n(x) = \int_0^1 f(y)K_n(x,y)dy, \tag{3.107}$$

existe pour presque tout x et $\widehat{f}_n\in L^p$. De plus pour $f\in L^p$ on a

$$\|f-\widehat{f}_n\|_{L^p}^p = \int_0^1 |f(x)-\widehat{f}_n(x)|^p dx \xrightarrow{n\mapsto+\infty} 0 \tag{3.108}$$

Démonstration. Pour simplifier nous noterons $\|\bullet\|_{L^p}^p = \|\bullet\|^p$. Supposons $p>1$ dans un premier temps, l'intégrale double

$$\mathcal{I} = \int_0^1\int_0^1 |K_n(x,y)|.|f(y)|^p dydx \tag{3.109}$$

existe car $\int_0^1 K_n(x,y)dy = 1$ et donc

$$\mathcal{I} \leq \|f\|^p, \tag{3.110}$$

donc $\int_0^1 |K_n(x,y)|.|f(y)|^p dy$ existe pour presque tout x. L'inégalité d'Hölder donne $(1/p+1/q=1)$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |K_n(x,y)|.|f(y)|dy &= \int_0^1 |K_n(x,y)|^{1/p}.|f(y)|.|K_n(x,y)|^{1/q}dy && (3.111) \\
&\leq \left\{\int_0^1 |K_n(x,y)|.|f(y)|^p dy\right\}^{1/p}\left\{\int_0^1 |K_n(x,y)|dy\right\}^{1/q} && (3.112) \\
&\leq \left\{\int_0^1 |K_n(x,y)|.|f(y)|^p dy\right\}^{1/p} 1^{1/q} && (3.113)
\end{aligned}$$

or nous avons vu que $\int_0^1 |K_n(x,y)|.|f(y)|^p dy$ existe donc $\int_0^1 |K_n(x,y)|.|f(y)| dy$ existe pour presque tout x et ces deux fonctions sont dans L^p. De plus

$$\int_0^1 |\widehat{f}_n(x)|^p dx = \int_0^1 \left| \int_0^1 K_n(x,y) f(y) dy \right|^p dx \leq \|f\|^p. \tag{3.114}$$

Pour ce qui concerne la convergence, on a par définition

$$\|\widehat{f}_n - f\|_p^p = \int_0^1 \left| \int_0^1 K_n(x,y) f(y) dy - f(x) \right|^p dx, \tag{3.115}$$

et

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 K_n(x,y) f(y) dy - f(x) \right|^p &= \left| \int_0^1 K_n(x,y) f(y) dy - f(x) \underbrace{\int_0^1 K_n(x,y) dy}_{\equiv 1} \right|^p & (3.116)\\
&= \left| \int_0^1 K_n(x,y)(f(y) - f(x)) dy \right|^p & (3.117)\\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_0^1 \left(K_n^{1/p} |f(x) - f(y)| \right)^p dy \right)^{1/p} \left(\int_0^1 \left(K_n^{1/q} \right)^q dy \right)^{1/q} & (3.118)\\
&\leq \left(\int_0^1 K_n |f(x) - f(y)|^p dy \right)^{1/p} & (3.119)\\
&\leq \left(\int_{|x-y|<\delta} K_n |f(x) - f(y)|^p dy + \int_{|x-y|>\delta} K_n |f(x) - f(y)|^p dy \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

or pour $\delta > 0$ donné tel que $|x-y| < \delta$ on a $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, et sur $|x-y| > \delta$, on a $|f(x) - f(y)|^p < M$ une constante telle que $M > 0$, ainsi

$$\left| \int_0^1 K_n(x,y) f(y) dy - f(x) \right|^p \leq \left(\epsilon^p \int_{|x-y|<\delta} K_n dy + M \int_{|x-y|>\delta} K_n dy \right)^{1/p}. \tag{3.120}$$

Or nous avons vu dans le lemme précédent que

$$\int_{|x-y|<\delta} K_n dy \xrightarrow{n \mapsto +\infty} 1, \tag{3.121}$$

$$\int_{|x-y|>\delta} K_n dy \xrightarrow{n \mapsto +\infty} 0. \tag{3.122}$$

Lorsque y tend vers x, ϵ et δ tendent vers 0 et comme

$$\left| \int_0^1 K_n(x,y) f(y) dy - f(x) \right|^p \leq \epsilon, \tag{3.123}$$

alors

$$\|\widehat{f}_n - f\|_p^p = \int_0^1 \left| \int_0^1 K_n(x,y) f(y) dy f(x) \right|^p dx \xrightarrow{n \mapsto +\infty} 0 \tag{3.124}$$

d'où le résultat pour $p > 1$.
Pour $p = 1$

$$\|\widehat{f}_n - f\|_1 = \int_0^1 \left| \int_0^1 K_n(x,y) f(y) dy - f(x) \right| dx, \tag{3.125}$$

et pour les mêmes raisons que celles évoquées dans le cas $p > 1$, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 K_n(x,y)f(y)dy - f(x)\right| &= \left|\int_0^1 K_n(x,y)(f(y)-f(x))dy\right| &(3.126)\\ &\leq \int_0^1 K_n(x,y)|f(y)-f(x)|dy, &(3.127)\end{aligned}$$

$$\left|\int_0^1 K_n(x,y)f(y)dy - f(x)\right| \leq \epsilon, \tag{3.128}$$

et donc

$$\|\widehat{f}_n - f\|_1 = \int_0^1 \left|\int_0^1 K_n(x,y)f(y)dyf(x)\right| dx \xrightarrow{n\mapsto+\infty} 0 \tag{3.129}$$

d'où le résultat pour $p = 1$.

□

Ainsi nous avons prouvé que le polynôme (n)-diffusé $\widehat{u}$ converge en norme L^p vers la fonction u élément de L^p. De plus $\widehat{u}$ converge uniformément vers u.

D'un point de vue plus pragmatique, les polynômes $\widehat{u}$ sont calculables par une multiplication matricielle quelque soit la maille considérée. Ils sont conservatifs et préservent la positivité de la fonction u si celle-ci l'était préalablement. Dans la méthode numérique ils seront particulièrement adaptés pour approcher certaines distributions tout en ajoutant de la diffusion numérique au schéma dans le but de stabiliser la méthode.

3.3 Extension en multidimension

Donnons la définition des bases de Bernstein dans $\mathbb{R}^q$ $(q > 1)$. Soit une triangulation de $\mathbb{R}^q$, notons $T = (\overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{X_1}, \ldots, \overrightarrow{X_q})$ le $(q+1)$-simplexe de sommet $\overrightarrow{X_q}$. Les bases de Bernstein de degré (n) dans T sont définies par

Définition 8. *Pour tout $(q+1)$-simplexe $T \subset \mathbb{R}^q$ on appelle base des polynômes de Bernstein d'ordre $(n) \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des polynômes de $\mathbb{P}_n(T)$*

$$\sigma_\alpha^{(n)}(\overrightarrow{X}) = C_{|\alpha|}^{\alpha} \lambda(\overrightarrow{X})^\alpha, \tag{3.130}$$

avec $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ un multi-indice, $|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_q = n$ et $\lambda^\alpha = \lambda_0^{\alpha_0}\lambda_1^{\alpha_1}\ldots\lambda_q^{\alpha_q}$, $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ étant les coordonnées barycentriques d'un point $\overrightarrow{X}$ de T.

Dans $\mathbb{R}^2$, le 3-simplexe T est un triangle, un point $\overrightarrow{X}$ de T est repéré par 3 coordonnées barycentriques : $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 = 1 - \lambda_0 - \lambda_1$. La coordonnée λ_0 est donnée par le rapport des surfaces des triangles définis par $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2})$ et $(\overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2})$, de même pour les autres coordonnées barycentriques.
La base des polynômes de Bernstein d'ordre (0) en 2D est :

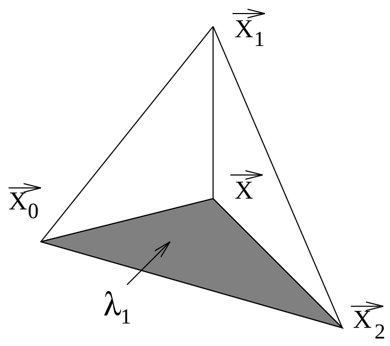


Figure 3.8: Coordonnées barycentriques dans un triangle : $\lambda_1 = mes(\vec{X}_0, \vec{X}_2, \vec{X})/mes(T)$

$$\sigma^{(0)}(\overrightarrow{X}) = 1. \tag{3.131}$$

La base des polynômes de Bernstein d'ordre (1) en 2D est :

$$\sigma_0^{(1)}(\overrightarrow{X}) = \lambda_0, \tag{3.132}$$
$$\sigma_1^{(1)}(\overrightarrow{X}) = \lambda_1, \tag{3.133}$$
$$\sigma_2^{(1)}(\overrightarrow{X}) = \lambda_2. \tag{3.134}$$

La base des polynômes de Bernstein d'ordre (2) en 2D est :

$$\sigma_0^{(2)}(\overrightarrow{X}) = \sigma_{00}^{(2)} = \lambda_0^2, \tag{3.135}$$
$$\sigma_1^{(2)}(\overrightarrow{X}) = \sigma_{01}^{(2)} = 2\lambda_0\lambda_1, \tag{3.136}$$
$$\sigma_2^{(2)}(\overrightarrow{X}) = \sigma_{11}^{(2)} = \lambda_1^2, \tag{3.137}$$
$$\sigma_3^{(2)}(\overrightarrow{X}) = \sigma_{12}^{(2)} = 2\lambda_1\lambda_2, \tag{3.138}$$
$$\sigma_4^{(2)}(\overrightarrow{X}) = \sigma_{22}^{(2)} = \lambda_2^2, \tag{3.139}$$
$$\sigma_5^{(2)}(\overrightarrow{X}) = \sigma_{02}^{(2)} = 2\lambda_0\lambda_2. \tag{3.140}$$

Dans $\mathbb{R}^3$, le 4-simplexe T est un tétraèdre, un point $\overrightarrow{X}$ de T est repéré par 4 coordonnées barycentriques : $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 1 - \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2$. La coordonnée λ_0 est donnée par le rapport des volumes des tétraèdres $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{X_3})$ et $(\overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{X_3})$, de même pour les autres coordonnées barycentriques.
La base des polynômes de Bernstein d'ordre (0) en 3D est :

$$\sigma^{(0)}(\overrightarrow{X}) = 1. \tag{3.141}$$

La base des polynômes de Bernstein d'ordre (1) en 3D est :

$$\sigma_0^{(1)}(\overrightarrow{X}) = \lambda_0, \tag{3.142}$$
$$\sigma_1^{(1)}(\overrightarrow{X}) = \lambda_1, \tag{3.143}$$
$$\sigma_2^{(1)}(\overrightarrow{X}) = \lambda_2, \tag{3.144}$$
$$\sigma_3^{(1)}(\overrightarrow{X}) = \lambda_3. \tag{3.145}$$

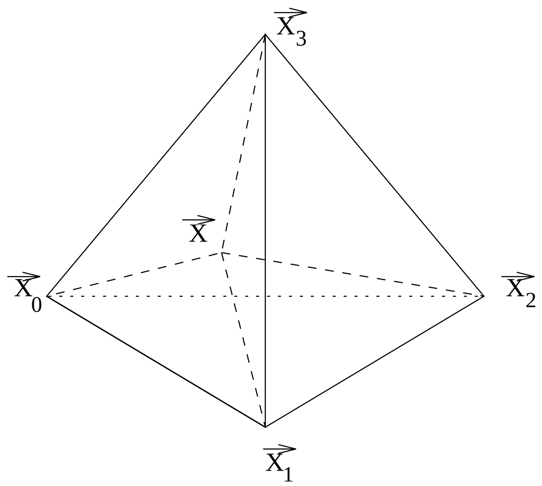


Figure 3.9: Coordonnées barycentriques dans un tétraèdre.

La base des polynômes de Bernstein d'ordre (2) en 3D est :

$$\sigma_0^{(2)}(\overrightarrow{X}) = \sigma_{00}^{(2)} = \lambda_0^2, \tag{3.146}$$
$$\sigma_1^{(2)}(\overrightarrow{X}) = \sigma_{01}^{(2)} = 2\lambda_0\lambda_1, \tag{3.147}$$
$$\sigma_2^{(2)}(\overrightarrow{X}) = \sigma_{02}^{(2)} = 2\lambda_0\lambda_2, \tag{3.148}$$
$$\sigma_3^{(2)}(\overrightarrow{X}) = \sigma_{03}^{(2)} = 2\lambda_0\lambda_3, \tag{3.149}$$
$$\sigma_4^{(2)}(\overrightarrow{X}) = \sigma_{11}^{(2)} = \lambda_1^2, \tag{3.150}$$
$$\sigma_5^{(2)}(\overrightarrow{X}) = \sigma_{12}^{(2)} = 2\lambda_1\lambda_2, \tag{3.151}$$
$$\sigma_6^{(2)}(\overrightarrow{X}) = \sigma_{13}^{(2)} = 2\lambda_1\lambda_3, \tag{3.152}$$
$$\sigma_7^{(2)}(\overrightarrow{X}) = \sigma_{22}^{(2)} = \lambda_2^2, \tag{3.153}$$
$$\sigma_8^{(2)}(\overrightarrow{X}) = \sigma_{23}^{(2)} = 2\lambda_2\lambda_3, \tag{3.154}$$
$$\sigma_9^{(2)}(\overrightarrow{X}) = \sigma_{33}^{(2)} = \lambda_3^2. \tag{3.155}$$

Dans la suite de l'exposé on aura besoin de connaître le nombre de polynômes de Bernstein associé à un degré (n) donné. En 1D le résultat est trivial puisque le nombre de monômes du développement de $(\lambda_1 + \lambda_2)^n$ est

$$B_n := (n+1). \tag{3.156}$$

En 2D pour des triangles, ce nombre vaut

$$B_n := \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \tag{3.157}$$

Enfin en 3D pour des tétraèdres ce nombre est

$$B_n := \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}. \tag{3.158}$$

On démontre de la même manière qu'en 1D les propriétés pour ces polynômes de base. Les remarques sur la propriété d'enveloppe convexe sont facilement étendues au cas multidimensionnel. Quant aux méthodes de régularisation, elles ont leur équivalent en 2D et 3D ; les matrices sont plus grandes, les intégrales s'effectuent

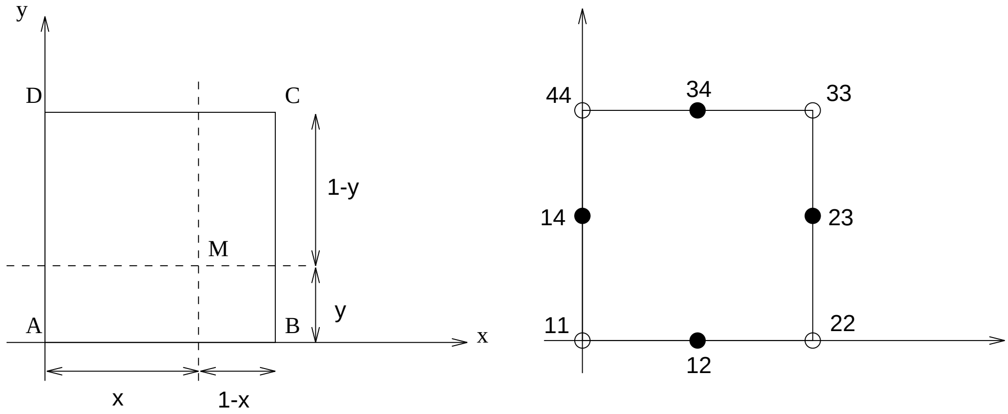


Figure 3.10: Carré unitaire et numérotation locale des polynômes d'ordre (2)

sur des surfaces ou des volumes mais les résultats s'étendent.
Ainsi une méthode numérique pourra être construite en choisissant les bases de Bernstein en 2D (respectivement 3D) pour des maillages composés de triangles (respectivement tétraèdres). Cependant on peut toujours imaginer que notre maillage soit composé de quadrangles ou encore qu'il soit non conforme (composé de triangles et de quadrangles). Peut-on étendre la notion de polynôme de Bernstein à de tels maillages ?

3.4 Extension aux maillages quadrangulaires

Il est relativement aisé de définir un type de polynômes de Bernstein pour des quadrangles, les polynômes devenant dans ce cas bilinéaires dans chaque maille. De cette manière on pourra écrire une méthode numérique pour des maillages quadrangulaires et/ou non conformes.
Par exemple sur le carré unitaire $ABCD$ le développement en monômes de (voir la figure 3.10)

$$((1-x)(1-y)+x(1-y)+(1-x)y+xy)^n = 1 \tag{3.159}$$

donne l'ensemble des polynômes bilinéaires positifs inférieurs à un qui partitionnent l'unité.
Dans le cas $n=(0)$, le polynôme de base est

$$\sigma_1(x,y) \quad = \quad 1. \tag{3.160}$$

Dans le cas $n=(1)$, les polynômes de base sont

$$\begin{aligned}
\sigma_1(x,y) &= (1-x)(1-y) &(3.161)\\
\sigma_2(x,y) &= x(1-y) &(3.162)\\
\sigma_3(x,y) &= (1-x)y &(3.163)\\
\sigma_4(x,y) &= xy. &(3.164)
\end{aligned}$$

Dans le cas $n = (2)$ par exemple on a (voir les polynômes d'ordre (2) dans la figure 3.11)

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(x,y) &= (1-x)^2(1-y)^2 && (3.165)\\
\sigma_{12}(x,y) &= 2(1-x)(1-y)^2x && (3.166)\\
\sigma_{22}(x,y) &= (1-y)^2x^2 && (3.167)\\
\sigma_{23}(x,y) &= 2(1-y)^2x^2y && (3.168)\\
\sigma_{33}(x,y) &= x^2y^2 && (3.169)\\
\sigma_{34}(x,y) &= 2(1-x)xy^2 && (3.170)\\
\sigma_{44}(x,y) &= (1-x)^2y^2 && (3.171)\\
\sigma_{14}(x,y) &= 2(1-x)^2(1-y)y && (3.172)\\
\sigma_{55}(x,y) &= 4(1-x)(1-y)xy. && (3.173)
\end{aligned}$$

On remarque aussi que sur une arête il y a les mêmes polynômes non nuls dans le cas triangulaire que dans le cas quadrangulaire. Ainsi on peut acoller des triangles et des quadrangles et construire une méthode numérique pour des maillages non conforme relativement facilement.

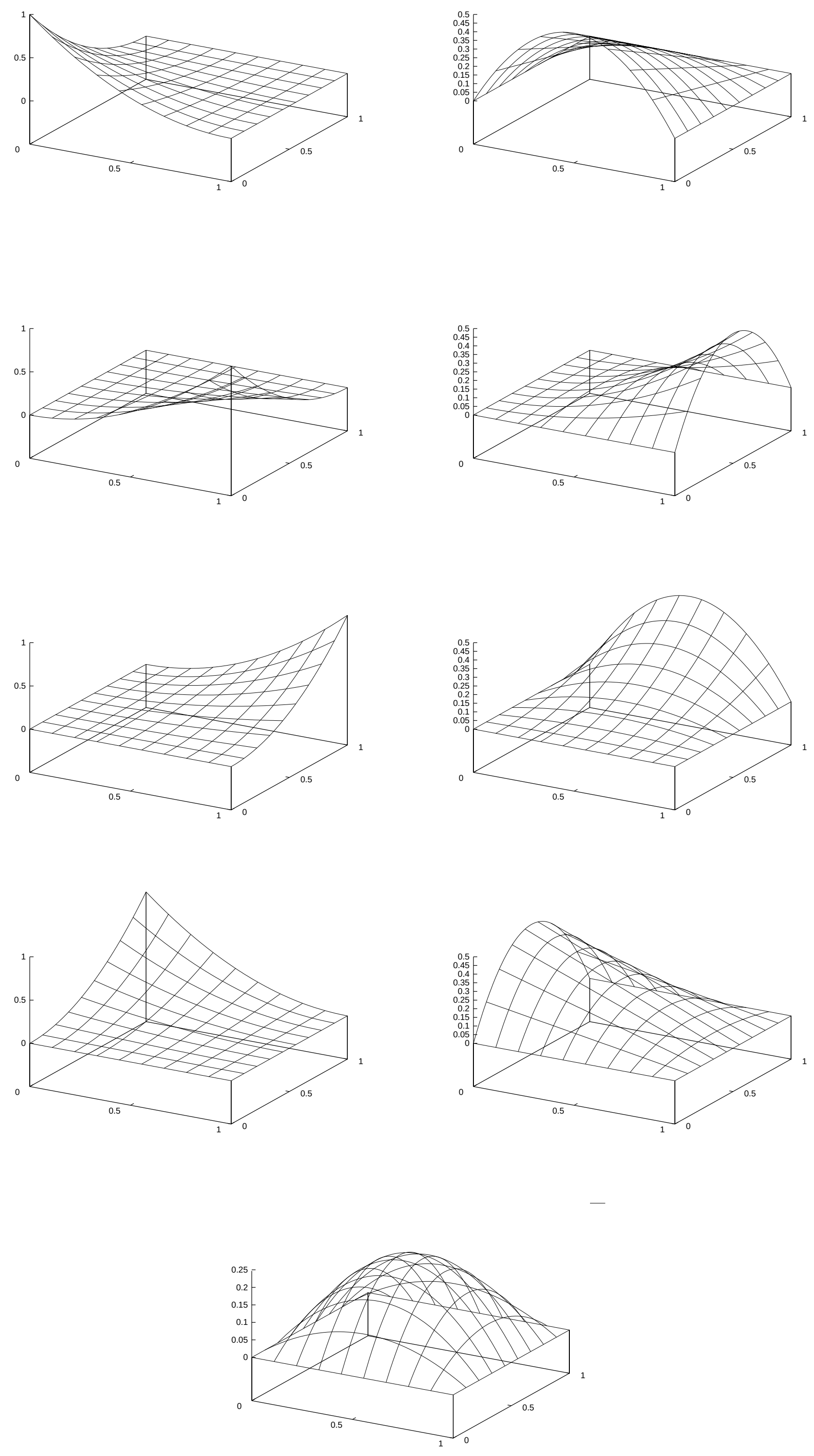


Figure 3.11: Polynômes de type Bernstein de degré (2) sur le carré unitaire - De haut en bas et de gauche à droite : $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, \sigma_{34}, \sigma_{44}, \sigma_{14}, \sigma_{55}$

Chapter 4

Méthode numérique en une dimension d'espace : un schéma Galerkin discontinu lagrangien

Dans ce chapitre nous développons les principes de la méthode numérique en une dimension d'espace. Ce faisant certaines caractéristiques intrinsèques de la méthode seront mises à jour. Elles nous permettrons de montrer que la méthode s'apparente aux méthodes de type Godunov et de Galerkin Discontinu (GD) dans une version lagrangienne.

Nous allons écrire dans cette partie le système des équations aux moments issu de la dynamique des gaz lagrangienne. Rappelons le système de lois de conservation en variable lagrangienne en une dimension d'espace (voir la partie **2.2**) :

$$\frac{\partial(UJ)}{\partial t} \quad + \quad \frac{\partial}{\partial \xi}F(U) = 0 \tag{4.1}$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \\ 1 \end{pmatrix} \qquad F = F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ pu \\ -u \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

muni d'une équation d'état $p = p(\rho, e)$.
On se donne un maillage de $\Omega = [x_{min}, x_{max}]$ à $M+1$ mailles $I_{i+1/2} = [x_i, x_{i+1}]$.

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{M}[x_i, x_{i+1}]. \tag{4.3}$$

Nous allons supposer que les données (UJ) sont continues par morceaux, il en résulte que (UJ) est continue sur la maille ouverte $\overset{o}{I}$ et l'on accepte les discontinuités (UJ) à tous les nœuds du maillage. D'une manière générale, les fonctions (UJ) sont des distributions sur le domaine Ω, il en est de même pour les fonctions $F(U)$. La dérivée spatiale de $F(U)$ n'existe qu'au sens des distributions aux bords des mailles et se traduit par une masse de Dirac :

$$\frac{\partial}{\partial \xi}F(U)(\xi_i) = \left[F(U)(\xi_i^-) - F(U)(\xi_i^+)\right]\delta_{\xi_i}(\xi) \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}F(U)(\xi_{i+1}) = \left[F(U)(\xi_{i+1}^-) - F(U)(\xi_{i+1}^+)\right]\delta_{\xi_{i+1}}(\xi), \tag{4.5}$$

où,

$$F(U)(\xi_i^-) = \lim_{\xi \to \xi_i, \xi < \xi_i} (F(U)(\xi)) \tag{4.6}$$

$$F(U)(\xi_i^+) = \lim_{\xi \to \xi_i, \xi > \xi_i} (F(U)(\xi)). \tag{4.7}$$

Le système aux moments s'obtient après l'intégration en espace de la multiplication de (4.1) par les polynômes de base de Bernstein d'ordre (n) soit pour tout $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial UJ}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}F(U)\right)\sigma_k(\xi)d\xi = 0, \tag{4.8}$$

qui est équivalent à :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega (UJ)(\xi)\sigma_k(\xi)d\xi + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial \xi}F(U)(\xi)\sigma_k(\xi)d\xi = 0. \tag{4.9}$$

On le réécrit en décomposant les intégrales sur Ω en intégrales sur les $M+1$ mailles ouvertes avec leurs masses de Dirac associées,

$$\sum_{i=0}^{M}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{I_{i+1/2}}(UJ)(\xi)\sigma_k(\xi)d\xi + \int_{\overset{\circ}{I}_{i+1/2}}\frac{\partial}{\partial \xi}F(U)(\xi)\sigma_k(\xi)d\xi + \left[F(U)(\xi_i^-) - F(U)(\xi_i^+)\right]\delta_{\xi_i}(\xi_i)\sigma_k(\xi_i)\right] = 0,$$

en simplifiant les masses de Dirac on obtient les équations aux moments dans Ω,

$$\sum_{i=0}^{M}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{I_{i+1/2}}(UJ)(\xi)\sigma_k(\xi)d\xi + \int_{\overset{\circ}{I}_{i+1/2}}\frac{\partial}{\partial \xi}F(U)(\xi)\sigma_k(\xi)d\xi + \left[F(U)(\xi_i^-) - F(U)(\xi_i^+)\right]\sigma_k(\xi_i)\right] = 0. \tag{4.10}$$

4.1 Equations aux moments dans une maille

Il s'agit de restreindre les équations (4.10) dans chaque maille $I_{i+1/2}$. On introduit alors des valeurs de répartition des Diracs (pour l'instant arbitraires), notées $F(U_i^*)$ pour chacun des nœuds ξ_i. En effet la masse de Dirac en ξ_i doit contribuer aux deux mailles voisines de ξ_i, il faut donc la répartir dans chacune d'elle : ceci est réalisé par les valeurs $F(U_i^*)$. Ainsi pour toute fonction de base σ_k on obtient dans chaque maille les équations aux moments

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_{I_{i+1/2}}(UJ)(\xi)\sigma_k(\xi)d\xi &+ \int_{\overset{\circ}{I}_{i+1/2}}\frac{\partial}{\partial \xi}F(U)(\xi)\sigma_k(\xi)d\xi \\ &+ \left[F(U_i^*) - F(U)(\xi_i^+)\right]\sigma_k(\xi_i) + \left[F(U)(\xi_{i+1}^-) - F(U_{i+1}^*)\right]\sigma_k(\xi_{i+1}) = 0.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Remarque. *1- Les valeurs $\sigma_k(\xi_i)$ (resp. $\sigma_k(\xi_{i+1})$) sont nulles pour tout k sauf pour $k=0$ (resp. $k=n$). Donc $\sigma_k(\xi_i) = \delta_{k0}$ et $\sigma_k(\xi_{i+1}) = \delta_{kn}$ (δ_{kn} est le symbole de Kronecker). La masse de Dirac au nœud ξ_i n'incrémente que l'équation pour $k=0$, et la masse de Dirac au nœud ξ_{i+1} l'équation pour $k=n$.*
2- Une intégration par partie dans (4.11) donne l'équation plus classique

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{I_{i+1/2}}(UJ)(\xi)\sigma_k(\xi)d\xi + \int_{\overset{\circ}{I}_{i+1/2}}F(U)(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\sigma_k(\xi)d\xi + F(U_i^*)\sigma_k(\xi_i) - F(U_{i+1}^*)\sigma_k(\xi_{i+1}) = 0. \tag{4.12}$$

Quelques soient les valeurs $F(U_i^*)$ la conservation est respectée car une masse de Dirac est « cassée » en deux contributions, chacune étant affectée à une des mailles ayant ξ_i pour frontière. La somme sur toutes les mailles des équations (4.11) donne évidemment (4.10).
Adoptons une écriture plus concise pour le système (4.11), soit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(M_{UJ,k}) + M_{\partial_\xi F(U),k} + \left[F(U_i^*) - F(U)(\xi_i^+)\right]\delta_{k0} + \left[F(U)(\xi_{i+1}^-) - F(U_{i+1}^*)\right]\delta_{kn} = 0, \tag{4.13}$$

où

$$M_{UJ,k} := \int_{I_{i+1/2}} (UJ)(\xi)\sigma_k(\xi)d\xi, \tag{4.14}$$

$$M_{\partial_\xi F(U),k} := \int_{\overset{\circ}{I}_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial \xi}F(U)(\xi)\sigma_k(\xi)d\xi. \tag{4.15}$$

Dans la suite on appelle *moments de UJ* les termes $M_{UJ,k}$, *termes intérieurs* les termes $M_{\partial_\xi F(U),k}$ et *termes de bords* l'ensemble constitué des deux masses de Dirac.

4.2 Schéma numérique

Nous allons nous attacher dans cette partie à décrire le schéma numérique destiné à résoudre les équations aux moments (4.13). Cependant quelques remarques préliminaires s'imposent. Les méthodes classiques de type Galerkin discontinu en formulation eulérienne utilisent en général une intégration numérique pour déterminer les termes intérieurs et de bords. Cependant il faut alors avoir accès explicitement aux valeurs des fonctions $F(U)$.
Pour cela nous ne disposons que des $n+1$ moments $M_{UJ,k}$. Il se pose alors la question : *comment à partir des $n+1$ moments $M_{UJ,k}$ peut-on définir une approximation de $M_{\partial_\xi F(U),k}$?*
En d'autres termes comment construire des approximations des fonctions $(UJ)(\xi)$, puis de $\partial_\xi F\left(\frac{(UJ)(\xi)}{J(\xi)}\right)$, sachant qu'il faut toujours vérifier $J(\xi) > 0$ et que $F(U)$ s'identifiant à p doit rester positive ?
Pour les méthodes Galerkin discontinu en version eulérienne, $F(U)$ est toujours un polynôme puisque les données U le sont. En lagrange, ce n'est plus le cas puisque les polynômes sont UJ et J; le rapport des deux n'étant *a priori* pas un polynôme. L'intégration numérique pour les méthodes de Galerkin discontinu est exacte pour les polynômes mais les instabilités numériques (si $(n) \geq 1$) sont telles qu'il est nécessaire d'utiliser un limiteur de type Van Leer, même dans des cas sans onde de choc. Ce limiteur existe dans le cas $(n) = 1$ et malgré des travaux récents pour son extension dans le cas (n) quelconque, il reste relativement coûteux [1].

Dans cette méthode nous allons tenter de nous affranchir le plus possible de tels limiteurs. Pour stabiliser le schéma numérique, un traitement particulier des termes intérieurs et des termes de bords a été envisagé. La phase de diffusion numérique est en partie ajoutée au schéma lors de ces calculs.
L'idée est de conserver une méthode qui s'identifie pour des polynômes d'ordre (0) au schéma de Godunov en version lagrangienne ; données constantes par morceaux, problèmes de Riemann aux bords des mailles. Pour les polynômes d'ordre supérieur un schéma intermédiaire entre un schéma de type Galerkin discontinu d'ordre (n) et le schéma de Godunov est construit.

La discrétisation temporelle explicite est discutée dans **4.2.1**, puis nous précisons la discrétisation spatiale des termes intérieurs et de bords. Nous verrons que le problème de Riemann pourra au choix être résolu de manière exacte ou approchée. Après avoir précisé les conditions vérifiées par le pas de temps en **4.2.4**, la partie **4.2.5** présente les processus de stabilisation de la méthode : notre limiteur, et l'utilisation des polynômes (n)-diffusés. Enfin nous construisons la discrétisation temporelle par la méthode de Runge-Kutta dans la partie **4.2.6**.

4.2.1 Discrétisation temporelle explicite

Dans un premier temps la discrétisation sur une maille temporelle $[t_n, t_{n+1}] \subset [0, T]$ avec $T > 0$ et $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ sera explicite. D'où

$$\frac{\partial}{\partial t}(M_{UJ,k}) \simeq \frac{M_{UJ,k}^{n+1} - M_{UJ,k}}{\Delta t}, \tag{4.16}$$

où l'exposant $.^{n+1}$ indique que la variable est considérée à $t = t_{n+1}$ et l'absence d'exposant indique que la variable est considérée à $t = t_n$.
Les termes incrémentaux sont évalués pour $t = t_n$ dans le cas explicite.

4.2.2 Termes intérieurs

Donnons l'approximation des termes intérieurs pour tout $j = 0, 1, \cdots, n$:

$$M_{\partial_\xi F(U),j} \quad = \quad \int_{\overset{\circ}{I}_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial \xi} F(U)(\xi)\sigma_j(\xi) d\xi. \tag{4.17}$$

Nous utilisons l'approximation (n)-diffusée des fonctions (UJ) pour calculer les termes incrémentaux. De la diffusion numérique est injectée dans le schéma par ce biais[1]. En utilisant la définition de $\widehat{UJ}$ on calcule :

$$\widehat{UJ}(\xi) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \widehat{UJ}_k \sigma_k(\xi) \tag{4.18}$$

$$F(\widehat{U})(\xi) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} F\left(\frac{\widehat{UJ}_k}{\widehat{J}_k}\right)\sigma_k(\xi) \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} F(\widehat{U})(\xi) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} F(\widehat{U}_k)\frac{\partial}{\partial \xi}\sigma_k(\xi), \tag{4.20}$$

avec

$$\widehat{U}_k = \frac{\widehat{UJ}_k}{\widehat{J}_k}, \tag{4.21}$$

d'où l'approximation du terme intérieur

$$M_{\partial_\xi F(U),j} \simeq \int_{\overset{\circ}{I}_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial \xi} F(\widehat{U})(\xi)\sigma_j(\xi) d\xi \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} F(\widehat{U}_k) \int_{\overset{\circ}{I}_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial \xi}\sigma_k(\xi)\sigma_j(\xi) d\xi. \tag{4.22}$$

Une partie des remarques faites dans le chapitre précédent concernant des polynômes de Bernstein entrent en jeu à cet instant. Nous voyons que le choix d'approcher $F(UJ/J)$ par $F(\widehat{UJ}/\widehat{J})$ n'est pas motivé par un soucis d'extrême précision, mais plutôt par une volonté de stabiliser la méthode. De plus $\widehat{J}$ sera non nul si tous ses moments $M_{J,k}$ le sont, ce qui facilitera la conservation de la positivité du jacobien.

[1]Nous verrons qu'elle est suffisante pour stabiliser la méthode en dehors des chocs pour des bases de $\mathbb{P}_2$. En présence de chocs elle ne l'est cependant pas et une procédure de limitation sera nécessaire.

Remarque. *Compte tenu des propriétés des bases de Bernstein, les intégrales* $\int_{\overset{\circ}{I}_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial \xi}\sigma_k(\xi)\sigma_j(\xi)d\xi$ *sont simples à calculer. Elles sont regroupées dans une matrice, qui à l'instar de* A *et* A^{-1} *(dans (3.41)), est assemblée uniquement en début de calcul. Cette matrice est constante par maille, seul* $\Delta\xi$ *apparaît en facteur devant celle-ci.*

4.2.3 Termes de bord

Pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$ les termes de bords sont deux masses de Dirac dont la forme est

$$\left[F(U_i^*) - F(U)(\xi_i^+)\right]\delta_{k0} + \left[F(U)(\xi_{i+1}^-) - F(U_{i+1}^*)\right]\delta_{kn}. \tag{4.23}$$

On approche $F(U)$ par le polynôme $F(\widehat{U})$ défini en (4.19) et

$$\begin{aligned} F(U)(\xi_i^+) &= F(\widehat{U}_i^+) = F(\widehat{U}_0) && (4.24)\\ F(U)(\xi_{i+1}^-) &= F(\widehat{U}_{i+1}^-) = F(\widehat{U}_n). && (4.25)\end{aligned}$$

$\widehat{U}_0$ (respectivement $\widehat{U}_n$) est la première (respectivement $(n+1)$ème) coordonnée de Bernstein du polynôme $\widehat{U}$. Il ne reste donc qu'à déterminer les valeurs jusqu'alors arbitraires : $F(U_i^*)$ et $F(U_{i+1}^*)$. Pour cela nous allons définir la solution du problème de Riemann avec pour données initiales à gauche (L) $\widehat{U}_i^-$ et à droite (R) $\widehat{U}_i^+$ à l'aide d'un solveur de Riemann.

Solution au problème de Riemann en variables de Lagrange.

Soit le problème physique modèle

$$\frac{\partial UJ}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}F(U) = 0 \tag{4.26}$$

$$U(\xi, t=0) = \begin{cases} U_L = \frac{(UJ)_L}{J_L} \text{ si } \xi < 0 \\ U_R = \frac{(UJ)_R}{J_R} \text{ si } \xi > 0 \end{cases} \tag{4.27}$$

où U_L et U_R sont les vecteurs constants représentant les états de l'écoulement à gauche et à droite de l'interface $\xi = 0$. La solution de ce problème de Riemann est autosemblable, en d'autres termes cette solution ne dépend que de la variable ξ/t. On peut la construire en considérant les solutions régulières et les solutions discontinues. Nous avons vu que le système ci-dessus possède trois valeurs propres distinctes $\mu_0, \mu_\pm$.
cas 1 : pour $\mu_0 = 0$ le champ caractéristique correspondant est linéairement dégénéré car $(H = (\rho, p, u, J)^t)$

$$r(\mu_0).\nabla_H(\mu_0) = 0. \tag{4.28}$$

cas 2 : pour $\mu_\pm = \pm\frac{c}{J}$ les champs caractéristiques associés sont vraiment non linéaires car

$$\nabla_H(\mu_\pm) = \begin{pmatrix} \partial_\rho \mu_\pm \\ \partial_p \mu_\pm \\ \partial_u \mu_\pm \\ \partial_J \mu_\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\frac{\gamma}{2c\rho J} \\ \mp\frac{c}{2\rho J} \\ 0 \\ -\frac{\mu_\pm}{J} \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

ainsi (voir **2.2**)

$$r(\mu_\pm).\nabla_H(\mu_\pm) = \pm\frac{\gamma+1}{2c\rho J} \neq 0. \tag{4.30}$$

La solution régulière provenant des champs caractéristiques associés à $\mu_\pm$ peut être dérivée du système

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dp} &= \frac{1}{c^2} && (4.31)\\
\frac{du}{dp} &= \pm\frac{1}{\rho c} && (4.32)\\
\frac{dJ}{dp} &= \frac{1}{\rho c\mu\pm}. && (4.33)
\end{aligned}$$

La solution ρ, u, J de l'écoulement U dans **une onde de détente** est reliée à l'écoulement amont U_0 par les expressions

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma} && (4.34)\\
u \mp \frac{2c}{\gamma-1} &= u_0 \mp \frac{2c_0}{\gamma-1} && (4.35)\\
J &= J_0 exp\left(\int_{p_0}^{p} \frac{1}{\rho c^2} dp\right). && (4.36)
\end{aligned}$$

En effet, la stricte conservation de l'entropie dans une détente impose

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}, \tag{4.37}$$

qui est équivalente à (4.34). Pour obtenir (4.35) on intégre formellement (4.32)

$$u - u_0 = \pm \int_{p_0}^{p} \frac{1}{\rho c} dp = \pm\frac{2}{\sqrt{\gamma\rho}}\left(\sqrt{p} - \sqrt{p_0}\right) = \pm\frac{2}{\gamma-1}(c - c_0). \tag{4.38}$$

Enfin (4.36) s'obtient en intégrant (4.33)

$$\begin{aligned}
\frac{dJ}{dp} &= \frac{1}{\rho c\mu\pm} = \pm\frac{J}{\rho c^2} && (4.39)\\
\ln\left(\frac{J}{J_0}\right) &= \int_{p_0}^{p} \frac{1}{\rho c^2} dp && (4.40)\\
J &= J_0 exp\left(\int_{p_0}^{p} \frac{1}{\rho c^2} dp\right). && (4.41)
\end{aligned}$$

Pour trouver la solution à l'intérieur de la détente on considère la caractéristique passant par l'origine et un point intérieur à la détente (ξ, t). La pente de la caractéristique est par définition

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\xi}{t} = \mu_\pm = \pm\frac{c}{J}, \tag{4.42}$$

on réécrit l'équation précédente sous la forme

$$f(p) = \frac{\gamma-1}{c_0}\left(\mp J\frac{\xi}{t} - c\right) = 0, \tag{4.43}$$

et en utilisant (4.34)-(4.36) dans (4.46) on trouve une équation en $p(\xi/t)$

$$f(p) = \mp\frac{\gamma-1}{c_0} J\frac{\xi}{t} - (\gamma-1)\frac{c}{c_0} \tag{4.44}$$

or

$$\frac{c}{c_0} = \left(\frac{\gamma p/\rho}{\gamma p_0/\rho_0}\right)^{1/2} = \left(\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)^{1/2} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \tag{4.45}$$

donc

$$f(p) = \mp\frac{\gamma-1}{c_0}J_0 exp\left(g(p)\right)\frac{\xi}{t} + (\gamma-1)\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = 0, \tag{4.46}$$

$$g(p) = \int_{p_0}^{p}\frac{1}{\rho c^2}dp. \tag{4.47}$$

Les autres variables ρ, u et J comme fonctions de ξ/t se déduisent aussi de (4.34)-(4.36).

Les solutions discontinues sont de deux types : les ondes de choc et les discontinuités de contact. Ces deux types vérifient les relations de saut de Rankine-Hugoniot déjà vues dans le premier chapitre à savoir en Lagrange ($D = \frac{d\xi}{dt}$ est la vitesse de l'onde considérée)

$$D[\rho J] = [\rho u] \tag{4.48}$$

$$D[\rho u J] = [p] \tag{4.49}$$

$$D[\rho e J] = [pu] \tag{4.50}$$

$$D[J] = -[u]. \tag{4.51}$$

Pour ce qui concerne **les ondes de choc**, notons U_0 l'état de l'écoulement avant le choc et U l'état après le choc, les relations de saut pour un choc s'écrivent alors en fonction de $P = \frac{p}{p_0}$

$$\rho = \rho_0\left(\frac{P(\gamma+1)+\gamma-1}{P(\gamma-1)+\gamma+1}\right) \tag{4.52}$$

$$u = u_0 \pm \frac{c_0}{\gamma}(P-1)\left(\frac{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}{P+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\right)^{1/2} \tag{4.53}$$

$$J = J_0 - \frac{u-u_0}{D_\pm}, \tag{4.54}$$

où $D_\pm$ est la vitesse du choc

$$D_\pm = \pm\frac{c_0}{J_0}\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}P + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)^{1/2}. \tag{4.55}$$

Pour ce qui concerne **les discontinuités de contact**, les relations de saut au travers de ce type d'onde sont

$$u = u_0 \tag{4.56}$$

$$p = p_0, \tag{4.57}$$

mais ρ et J peuvent varier arbitrairement.

Solveurs de Riemann.

Un solveur de Riemann doit résoudre de manière exacte ou approchée un problème du type (4.26)-(4.27) pour chaque nœud du maillage. Nous avons vu que la solution de ce problème dépend d'une fonction implicite en

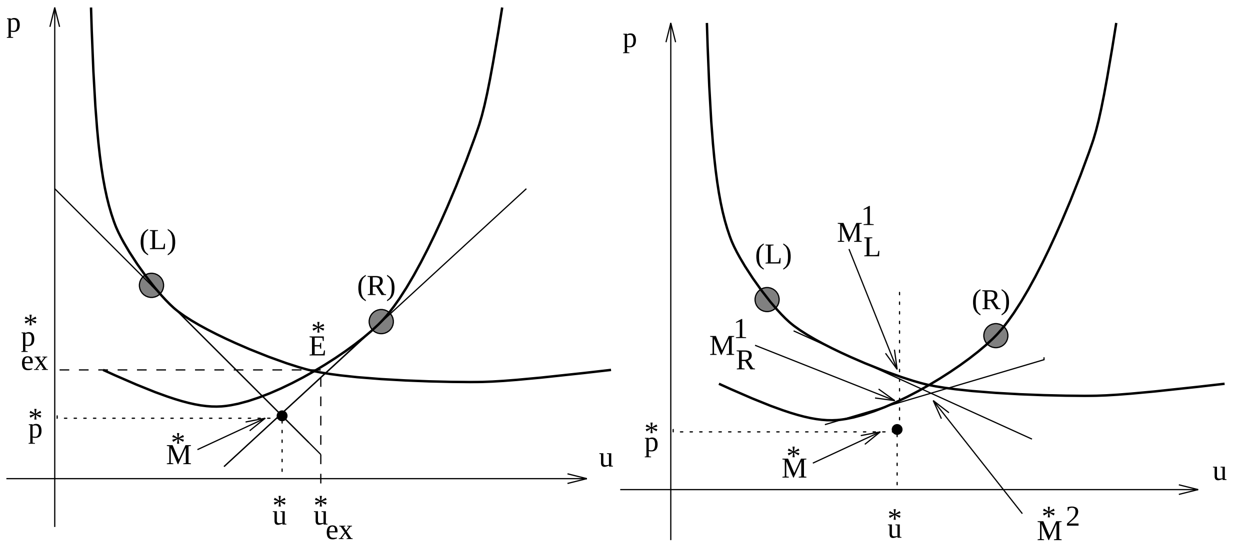


Figure 4.1: Solveur de Riemann - Initialisation (gauche) - Itération 1 (droite)

p (4.46). Seul un processus itératif peut donner une solution exacte à un ϵ près : c'est alors un solveur de Riemann exact. Tout autre processus (non itératif par exemple) mène à un solveur de Riemann approché.

Solveur de Riemann exact. Schématiquement, dans le diagramme (u, p), les deux courbes (de choc et de détente) qui passent par les états (L) et (R) se coupent en un point $E^* = (u^*_{ex}, p^*_{ex})^t$: la solution exacte au problème de Riemann (voir la courbe de gauche de la figure 4.1). Ce point est calculé par un processus itératif dont l'initialisation est par exemple le point $M^* = (u^*, p^*)^t$, intersection des tangentes en (L) et (R). Les pentes des tangentes valent respectivement $-(\rho c)_L$ et $+(\rho c)_R$. Notons pour simplifier $\widehat{U}_i^- = U_L$ et $\widehat{U}_i^+ = U_R$, les équations permettant de calculer u^* et p^* pour le nœud ξ_i sont alors :

$$u^* = \frac{p_R - p_L + (\rho c u)_R + (\rho c u)_L}{(\rho c)_R + (\rho c)_L} \tag{4.58}$$

$$p^* = p_R + (\rho c)_R(u^* - u_R) = p_L - (\rho c)_L(u^* - u_L) \tag{4.59}$$

$$c_L = \sqrt{\gamma \frac{p_L}{\rho_L}} \text{ et } c_R = \sqrt{\gamma \frac{p_R}{\rho_R}}, \tag{4.60}$$

on détermine ensuite les points $M^1_R = (u^*, p^{*,1}_R)^t$ et $M^1_L = (u^*, p^{*,1}_L)^t$ qui sont les points d'intersection des courbes (L) et (R) respectivement et de la droite $u = u^*$(voir la courbe de gauche de la figure 4.1). On trace les tangentes en M^1_R et M^1_L qui se croisent en un point $M^{*,2} = (u^{*,2}, p^{*,2})^t$. En réitérant ce processus jusqu'à ce que la différence entre deux points $M^{*,\nu} = (u^{*,\nu}, p^{*,\nu})^t$ et $M^{*,\nu+1} = (u^{*,\nu+1}, p^{*,\nu+1})^t$ soit inférieure à un seuil fixé, on trouve un point aussi proche qu'on le souhaite de la solution exacte.

Solveur de Riemann acoustique. Un solveur exact est cependant quelque peu coûteux et sa parallélisation peut être difficile. Nous avons préféré utiliser un solveur approché encore appelé solveur acoustique. Il s'agit en fait de ne pas itérer le processus précédent et de se contenter d'approcher E^* par le point M^* défini par (4.58)-(4.59). Un tel solveur apparaît chez Godunov [59] qui remarque que dans la majorité des cas $U_L \sim U_R$. Ce solveur approché donne effectivement des résultats d'un rapport qualité/prix intéressant.

4.2.4 Condition de stabilité sur le pas de temps Δt

Le pas de temps est limité par deux conditions : une condition de type Courant-Friedricks-Lewy (CFL) et une condition de positivité du jacobien.

Condition de positivité de J

Le changement de variable décrit dans le **chapitre 2** n'est valide que dans la mesure où le jacobien de la transformation ne change pas de signe ; J doit rester positif puisqu'il l'est par définition à $t = 0$. Au cours du calcul il faut donc s'assurer que $J \geq 0$ à tout instant et pour tout point. On exhibe cette condition de positivité en considérant l'équation au moment sur J

$$M_{J,k}^{n+1} = M_{J,k}^{n} + \Delta t \Delta_{J,k} \tag{4.61}$$

où $\Delta_{J,k}$ est l'accroissement du moment de J par rapport à la fonction de base σ_k. En utilisant la définition des polynômes de Bernstein on observe que le polynôme $\widehat{J}^{n+1}(\xi)$ sera positif pour tout ξ si chaque composante dans la base de Bernstein $\widehat{J}_k^{n+1}$ est positive (condition nécessaire), or

$$\widehat{J}_k^{n+1} = \frac{M_{J,k}^{n+1}}{\int_{I_{i+1/2}} \sigma_k d\xi} \tag{4.62}$$

comme $\sigma_k(\xi) \geq 0$ pour tout ξ alors il suffit que $M_{J,k}^{n+1}$ soit positif pour que $\widehat{J}_k^{n+1}$ le soit, ce qui mène à la condition sur le pas de temps

$$\text{si } \Delta_{J,k} \geq 0 \quad \widehat{J}_k^{n+1} \geq 0 \Longrightarrow \text{ pas de condition} \tag{4.63}$$

$$\text{si } \Delta_{J,k} < 0 \quad \widehat{J}_k^{n+1} \geq 0 \Longrightarrow \Delta t \leq \frac{\widehat{J}_k^{n}}{-\Delta_{J,k}}. \tag{4.64}$$

Cette condition devant évidemment être vérifiée pour toutes les mailles et toutes les fonctions de base σ_k, on trouve une valeur minimale pour le pas de temps que nous notons Δt_{POS}. L'équation (4.64) montre clairement que plus J sera proche de 0, plus le pas de temps sera contraint.

Condition CFL

Cette condition concerne la propagation des ondes. On impose qu'une onde quittant un nœud ξ_i à la vitesse du son, n'atteigne pas le milieu de la maille dans laquelle elle se propage,

$$(\Delta t)_i \quad \leq \quad \frac{1}{2} \Delta\xi \min \left(\frac{M_{J,i}^{+}}{\widehat{c}_i^{+}}, \frac{M_{J,i}^{-}}{\widehat{c}_i^{-}} \right) \tag{4.65}$$

$$\Delta t_{CFL} \quad = \quad \min_{i=0,\dots,M} (\Delta t)_i. \tag{4.66}$$

Bien qu'il n'existe pas de démonstration rigoureuse de ce critère CFL, il semble être approprié à la plupart des phénomènes physiques observés.

Le pas de temps utilisable doit en fin de compte vérifier la condition globale suivante :

$$\Delta t \leq \min(\Delta t_{CFL}, \Delta t_{POS}). \tag{4.67}$$

Cette condition va pouvoir être relachée en utilisant une version implicite de la méthode. Le schéma implicite est décrit dans la partie **4.2.6**.

4.2.5 Stabilisation

Formellement l'utilisation de polynômes d'ordre (n) mène à un schéma quasi d'ordre $n+1$ dans les méthodes de GD classiques, ainsi qu'à un problème évident de stabilité. Pour des polynômes d'ordre $(n) = 1$, Cockburn et Shu ainsi que d'autres auteurs ont amélioré les limiteurs de pente de type Van Leer existant. Par contre il n'existe pas d'extension naturelle de ce type de limiteur pour (n) quelconque. Des limiteurs de pente ont été récemment introduits dans une méthode GD eulérienne ([1]), mais leur coût est encore relativement important même s'ils apportent une solution envisageable. De plus la stabilisation de schémas GD $(n > 1)$ aussi bien que de schémas lagrangiens est une question qui, même si certains travaux l'abordent, n'est pas clairement résolue. Un limiteur un peu particulier est utilisé dans notre méthode. Il faut garder à l'esprit que de la diffusion numérique a déjà été introduite dans le schéma du fait de l'utilisation des polynômes (n)-diffusés. De plus nous n'avons pas accès aux valeurs des fonctions mais à leurs moments par rapport aux bases de Bernstein. Notre limiteur n'est pas appliqué sur les variables physiques (UJ) mais sur les moments de celles-ci. De plus, grace à la formulation lagrangienne la détection des zones à limiter est simplifiée. En effet le jacobien peut être considéré comme un taux de dilatation ponctuel ; sa valeur indique les zones de compression $(J \ll 1)$ ou d'expansion $(J \gg 1)$. La variable jacobienne est alors utilisée comme unique critère. Si une zone est à limiter alors *toutes les variables* (UJ) sont corrigées en bloc. Résumons cela dans l'algorithme suivant

Algorithme. Pour toute maille $I_{i+1/2}$ on définit des valeurs minimales

$$m_{i+1/2} \quad = \quad \min_{k, I_{i+1/2}} \left(\frac{M_{J,k}^{n+1} - M_{J,k}^{n}}{M_{J,k}^{n}} \right)$$

Si $\quad m_{i+1/2} < 0$ et $m_{i+1/2} < \min(m_{i-1/2}, m_{i+3/2})$ **alors**
 Pour tout U
 $\left(M_{UJ,.}^{c,n+1}\right) := \frac{n+1}{\Delta\xi} A \left(M_{UJ,.}^{n+1}\right)$
 Fin pour
Fin si

Le test $m_{i+1/2} < 0$ assure que nous sommes dans une zone de compression, le test $m_{i+1/2} < \min(m_{i-1/2}, m_{i+3/2})$ assure quant à lui que la compression a été la plus importante dans la maille $I_{i+1/2}$ pendant le pas de temps.

L'intérêt d'un tel limiteur provient en premier lieu du petit nombre de test à réaliser puisque seule la variable J est observée. Dans un second temps, la limitation peut être considérée comme linéaire ; une combinaison linéaire des moments à l'instant t_{n+1} donne la valeur du moment corrigé. Le coût d'un tel limiteur est pour cela particulièrement réduit.

4.2.6 Discrétisation temporelle : méthode de Runge-Kutta

Une méthode de Runge-Kutta (RK) peut être utilisée pour la discrétisation en temps. Par exemple la discrétisation de RK à deux pas, menant à un schéma de type prédicteur/correcteur, s'écrit

$$\begin{array}{lcl} \textit{1er pas :} & & \\ \widetilde{M}^{n+1}_{UJ,k} & = & M^{n}_{UJ,k} + \Delta t \Delta^{n}_{UJ,k} \\ \textit{2ème pas :} & & \\ \widetilde{M}^{n+2}_{UJ,k} & = & \widetilde{M}^{n+1}_{UJ,k} + \Delta t \Delta^{n+1}_{UJ,k} \\ \textit{Affectation :} & & \\ M^{n+1}_{UJ,k} & = & \frac{M^{n}_{UJ,k} + \widetilde{M}^{n+2}_{UJ,k}}{2}. \end{array}$$

La méthode de RK permet d'obtenir des schémas numériques implicites. De tels schémas numériques sont moins stricts concernant la valeur du pas de temps et des valeurs plus importantes de Δt sont utilisables en pratique. En toute théorie il faudrait faire correspondre la précision de la discrétisation en temps et en espace, cependant nous nous sommes restreints à un schéma prédicteur/correcteur, le surcoût de la méthode RK à trois pas ne semblant pas justifié.

4.3 Remaillage par une méthode de type particulaire

L'un des défauts souvent reproché aux méthodes lagrangiennes multidimensionnelles est que le pas de temps risque de tendre vers 0 comme conséquence de la forte compression des mailles. Si on arrive à conserver le jacobien de la transformation positif cela implique que le pas de temps est d'autant réduit que la maille est comprimée. A terme on trouve des Δt si petit qu'il devient inenvisageable de mener à bien le calcul (le nombre de cycle devenant trop important !). Evidemment cette remarque n'a de raison d'être que si le code n'a pas généré d'erreur fatale ! En effet la tendance des méthodes lagrangiennes à osciller réduit tellement leur robustesse que pour des écoulements chahutés, le code calcule des croisements de mailles, du déferlement... divers phénomènes qui annihilent nos espoirs de résultats.
Une manière d'atténuer les oscillations consiste à ajouter de la viscosité numérique au schéma ou encore de remailler. Il s'agit dans ce cas de projeter l'information (lagrangienne) sur un maillage (eulérien) pour lequel la taille réelle des mailles est « acceptable ». Les méthodes ALE (*Arbitrary-Lagrangian-Eulerian*) usent de cet artifice pour conserver la robustesse des méthodes eulériennes tout en gardant une certaine précision[2] des méthodes lagrangiennes. Les méthodes ALE projettent et remaillent à tous les cycles de calcul, ce qui en fait une phase relativement coûteuse et dont la précision diminue avec le nombre de remaillage.

En 1D, la plupart du temps, aucun remaillage n'est nécessaire parce que les croisements de mailles sont assez facilement évités à l'aide d'une bonne gestion des conditions CFL et de positivité. Les remarques précédentes ont surtout une raison d'être pour deux et trois dimensions d'espace, où les méthodes lagrangiennes se doivent de posséder une bonne phase de remaillage sans quoi elles se trouvent fortement pénalisées pour traiter correctement des cas durs. Indépendamment du problème de robustesse certains phénomènes ne peuvent être calculés sans une étape de projection/remaillage comme la simulation du glissement en 2D par exemple.

Dans la méthode présentée nous avons insisté sur la diffusion numérique induite par l'utilisation des polynômes $\widehat{U}$; c'est bien cette diffusion qui va tuer les oscillations numériques parasites comme nous le verrons dans les

[2]La phase de projection ajoute de la diffusion numérique et la précision de la méthode lagrangienne est alors réduite après chaque remaillage.

tests. L'absence d'oscillation numérique permet entre autre de remailler très peu souvent. Nous avons cependant imaginé une manière de projeter l'information (portée sur le maillage lagrangien) sur un domaine discret : une population de particules. Le choix d'un nouveau maillage est ensuite fait. On repositionne les particules dans ce nouveau maillage et à l'aide de celles-ci on calcule les moments discrets qui vont initialiser le schéma numérique.

4.3.1 Projection de l'information sur une population de particules

Donnons dans un premier temps une définition de ce que l'on entend par particule.

Définition 9. *On appelle particule, une masse de Dirac $\delta_{\xi_p}(\xi)$ positionnée en ξ_p portant 5 poids ;*

$$(\omega U)_p = (\omega\rho, \omega\rho u, \omega\rho e, \omega)_p \qquad U_p = \frac{(\omega U)_p}{\omega_p}.$$

Un poids « volume » ω_p a nécessairement été introduit pour rendre compte des évolutions de J. Il ne s'agit cependant pas d'un volume au sens propre du terme, on ne donne pas une forme à la particule, simplement cette masse de Dirac représente ponctuellement le taux de dilatation, c'est-à-dire J.
Cette approche est très différente de celle par exemple utilisée dans les méthodes PIC (*Particle-In-Cell* voir [18], [50], [61], [10] par exemple) où une particule possède une masse constante ce qui n'est pas le cas pour nous car la masse de la particule est égale au produit de ω par ρ et chacune de ces variables évolue dans le temps. On se différencie aussi des méthodes SPH (*Smoothed-Particle-Hydrodynamics* voir [48], [28], [29] par exemple) où une forme est donnée à la particule qui n'évolue plus dans un maillage donné. Bien que de nouvelles classes de méthodes particulaires apparaissent (voir [23], [24], [26], [25]), les relations avec celle présentée ne sont que lointaines.

On dira qu'une particule p appartient à une maille $I_{i+1/2}$ si $\xi_p \in I_{i+1/2}$. Il est alors simple de définir les moments discrets par rapport aux bases de Bernstein

Définition 10. *On appelle moments discrets d'ordre (n) dans Bernstein les $(n+1)$-vecteurs*

$$(M_{\omega,\cdot}) \equiv \begin{pmatrix} M_{\omega U,0} \\ M_{\omega U,1} \\ \vdots \\ M_{\omega U,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{p\in I_{i+1/2}} \omega_p U_p \sigma_0^{(n)}(\xi_p) \\ \sum_{p\in I_{i+1/2}} \omega_p U_p \sigma_1^{(n)}(\xi_p) \\ \vdots \\ \sum_{p\in I_{i+1/2}} \omega_p U_p \sigma_n^{(n)}(\xi_p) \end{pmatrix}$$

La question qui se pose est de savoir comment déterminer une population de N particule(s) par maille qui aurait les mêmes moments que ceux définis par le schéma numérique. Il est évident que par $N = (n+1)$ points passe un unique polynôme de $\mathbb{P}_n$, par $N < n+1$ points il passe une infinité de polynômes de $\mathbb{P}_n$ et par $N > n+1$ points il ne passe *a priori* aucun polynôme de $\mathbb{P}_n$. De plus la précision du remaillage est intimement liée au nombre de particules, en effet plus on aura de particules plus le domaine continu sera discrétisé finement.
Il s'agit alors de se placer dans le cas $N > n+1$ et de faire une hypothèse sur la distribution des masses de Dirac pour obtenir l'unicité de la population.

Lemme 5. *Soient $N \geq n+1$ positions distinctes dans $I_{i+1/2}$ notées ξ_p, $p = 1,\dots,N$. Soient $(M_{UJ,\cdot})$ les moments d'ordre (n) dans Bernstein donnés par le schéma. Si les poids $(\omega U)_p$ associés à la position ξ_p sont distribués sur un polynôme d'ordre (n) alors il existe une unique population de N particules telle que pour tout $k = 0,1,\dots,n$*

$$M_{\omega U,k} = M_{UJ,k} \tag{4.68}$$

Démonstration. Considérons les polynômes

$$\widetilde{(\omega U)}(\xi) \quad = \quad \sum_{j=0}^{n} \widetilde{(\omega U)}_j \sigma_j(\xi),$$

tels que pour toute particule p

$$(\omega U)_p \quad = \quad \widetilde{(\omega U)}(\xi_p).$$

Introduits dans (4.68) ils mènent à

$$M_{\omega U,k} \quad = \quad \sum_{p \in I_{i+1/2}} \widetilde{(\omega U)}(\xi_p)\sigma_k(\xi_p) = \sum_{j=0}^{n} \widetilde{(\omega U)}_j \sum_{p \in I_{i+1/2}} \sigma_j(\xi_p)\sigma_k(\xi_p).$$

Matriciellement on obtient par rapport à la base de Bernstein

$$\begin{aligned}
(M_{\omega U,.}) \quad &= \quad \left(\sum_{p=1}^{N} \sigma_i(\xi_p)\sigma_j(\xi_p) \right)_{i,j=0,\ldots,n} \left(\widetilde{\omega U}_. \right) \\
&= \quad B \left(\widetilde{\omega U}_. \right) && (4.69) \\
(M_{\omega U,.}) \quad &\overset{\text{déf.}}{=} \quad (M_{UJ,.}), && (4.70)
\end{aligned}$$

ce qui revient à pouvoir résoudre le système linéaire

$$B \left(\widetilde{\omega U}_. \right) = (M_{UJ,.}). \tag{4.71}$$

La population de particules sera totalement définie si et seulement si la matrice B est inversible.

Lemme 6. *La matrice B est définie positive et symétrique. De plus B est inversible si et seulement si $\xi_i \neq \xi_j$ pour tout $i \neq j$.*

Démonstration. (Lemme 6). La positivité et la symétrie sont évidentes. L'inversibilité s'obtient en considérant les vecteurs de $\mathbb{R}^N$

$$R_0 = (\sigma_0(\xi_1), \sigma_0(\xi_2), \ldots, \sigma_0(\xi_N))^t \tag{4.72}$$
$$R_1 = (\sigma_1(\xi_1), \sigma_1(\xi_2), \ldots, \sigma_1(\xi_N))^t \tag{4.73}$$
$$\vdots \tag{4.74}$$
$$R_n = (\sigma_n(\xi_1), \sigma_n(\xi_2), \ldots, \sigma_n(\xi_N))^t . \tag{4.75}$$
$$\tag{4.76}$$

Par définition chaque élément de la matrice B vaut ($(.,.)$ dénote le produit scalaire)

$$b_{ij} = (R_i, R_j), \tag{4.77}$$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} (R_0,R_0) & (R_0,R_1) & \cdots & (R_0,R_n) \\ (R_1,R_0) & (R_1,R_1) & \cdots & (R_1,R_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (R_n,R_0) & (R_n,R_1) & \cdots & (R_n,R_n) \end{pmatrix}. \tag{4.78}$$

B sera donc inversible si et seulement si $\{R_0, \cdots, R_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^{n+1}$.
Montrons que $\{R_0, \cdots, R_n\}$ est une base. Soit $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n)^t \in \mathbb{R}^{n+1}$ alors

$$\alpha_0 R_0 + \ldots + \alpha_n R_n = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_0(\xi_1) & \sigma_1(\xi_1) & \cdots & \sigma_n(\xi_1) \\ \sigma_0(\xi_2) & \sigma_1(\xi_2) & \cdots & \sigma_n(\xi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_0(\xi_N) & \sigma_1(\xi_N) & \cdots & \sigma_n(\xi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0, \tag{4.79}$$

appellons K la matrice précédente. Le résultat sera prouvé si K est inversible ce qui est vrai si les lignes de K forment une base de $\mathbb{R}^{n+1}$. Or les lignes de K forment une base de $\mathbb{R}^N$ car $\{\sigma_.\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et $\xi_i \neq \xi_j$ pour tout $i \neq j$. Donc $\{R_0, \cdots, R_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^{n+1}$. La matrice B est donc inversible.
(retour à la démonstration de la propriété 5) Ainsi la population de particules est totalement définie si et seulement si $\xi_i \neq \xi_j$ pour tout $i \neq j$, ce qui est équivalent à $\{\xi_p\}_{p=1,\ldots,N}$ sont N positions distinctes dans $I_{i+1/2}$, ce qui termine la preuve.

□

Nous voyons ainsi qu'en supposant les poids des N particules distribués sur un polynôme de degré (n), il existe une unique population de particules ayant ses moments discrets d'ordre (n) dans Bernstein égaux aux moments d'ordre (n) donnés par le schéma numérique. Cette procédure (moments → particules → moments) est évidemment exacte pour des polynômes d'ordre inférieur ou égal à (n) si l'on ne change pas de maillage. Par contre un changement de maillage brise l'exactitude de cette intégration numérique.

4.3.2 Remaillage et projection sur le nouveau maillage

Le but de cette partie est de construire un procédé nous assurant une intégration numérique exacte d'une fonction polynômiale sur Ω même après un nombre quelconque de remaillage du domaine. Appelons M le maillage initial dont la maille courante est $I_{i+1/2}$. Le nouveau maillage est noté $\mathcal{M}$ et la maille courante est appelée $\mathcal{I}_{i+1/2}$. Supposons que la fonction (UJ) soit polynômiale sur le domaine Ω et qu'il cœxiste N particules dans la maille $I_{i+1/2}$. Nous savons que si nous plaçons les N particules aux points de Gauss (ξ_p, w_p) alors l'intégration numérique

$$M_{UJ,k} := \int_{I_{i+1/2}} (UJ)(\xi)\sigma_k(\xi)d\xi = \sum_{p=1}^{N} w_p (UJ)(\xi_p)\sigma_k(\xi_p) \tag{4.80}$$

est exacte si $N \geq n$ dans M.
Changeons de maillage. Les positions des particules ainsi que leurs poids $(UJ)(\xi_p)$ sont fixes. Les définitions des polynômes de Bernstein ont changé puisque les mailles sont différentes. Les particules dans $\mathcal{I}_{i+1/2}$ sont des particules qui étaient positionnées *a priori* dans plusieurs anciennes mailles $I_{i+1/2}$. Supposons qu'il cœxiste $\mathcal{N}$ particules dans la maille $\mathcal{I}_{i+1/2}$. Nous voulons toujours intégrer exactement

$$\mathcal{M}_{UJ,k} := \int_{\mathcal{I}_{i+1/2}} (UJ)(\xi)\sigma_k(\xi)d\xi \equiv \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{W}_q (UJ)(\xi_q)\sigma_k(\xi_q). \tag{4.81}$$

Existe-t-il des poids $\mathcal{W}_q$ tels que (4.81) soit vraie pour tout polynôme (UJ) ?

Lemme 7. *Le problème d'intégration numérique (4.81) dans $\mathcal{I}_{i+1/2}$ pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$ et pour tout polynôme $(UJ) \in \mathbb{P}_n(\Omega)$ possède une unique solution sous les hypothèses*

$$(i) \quad \mathcal{N} \geq 2n+1$$
$$(ii) \quad \forall q = 1, 2, \ldots \mathcal{N} \quad \mathcal{W}_q = \widetilde{\mathcal{W}}(\xi_q), \text{ avec } \widetilde{\mathcal{W}} \in \mathbb{P}_{2n}(\mathcal{I}_{i+1/2}).$$

Démonstration. Décomposons (UJ) sur Bernstein dans la nouvelle maille $\mathcal{I}_{i+1/2}$ (c'est valide puisque $(UJ) \in \mathbb{P}_n(\Omega)$)

$$(UJ)(\xi) = \sum_{j=0}^{n} (UJ)_j \sigma_j(\xi), \tag{4.82}$$

Les polynômes $\{\sigma_j\}_{j=0}^{n}$ sont les polynômes de Bernstein d'ordre (n) définis dans $\mathcal{I}_{i+1/2}$. On introduit (4.82) dans (4.81) et

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{I}_{i+1/2}} (UJ)(\xi)\sigma_k(\xi)d\xi &= \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{W}_q (UJ)_q \sigma_k(\xi_q) & (4.83)\\
\int_{\mathcal{I}_{i+1/2}} \left(\sum_{j=0}^{n} (UJ)_j \sigma_j(\xi)\right) \sigma_k(\xi)d\xi &= \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{W}_q \left(\sum_{j=0}^{n} (UJ)_j \sigma_j(\xi_q)\right) \sigma_k(\xi_q) & (4.84)\\
\sum_{j=0}^{n} (UJ)_j \int_{\mathcal{I}_{i+1/2}} \sigma_j(\xi)\sigma_k(\xi)d\xi &= \sum_{j=0}^{n} (UJ)_j \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{W}_q \sigma_j(\xi_q)\sigma_k(\xi_q), & (4.85)
\end{aligned}$$

ce système sera vérifié si pour tout j, k on a

$$\int_{\mathcal{I}_{i+1/2}} \sigma_j(\xi)\sigma_k(\xi)d\xi = \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{W}_q \sigma_j(\xi_q)\sigma_k(\xi_q), \tag{4.86}$$

la définition des polynômes de Bernstein nous permet de remplacer $\sigma_j(\xi)\sigma_k(\xi)$ par $\sigma_{j+k}^{(2n)}(\xi)$ à une constante près et (4.86) devient

$$\begin{aligned}
\frac{C_n^j C_n^k}{C_{j+k}^{2n}} \int_{\mathcal{I}_{i+1/2}} \sigma_{j+k}^{(2n)}(\xi)d\xi &= \frac{C_n^j C_n^k}{C_{j+k}^{2n}} \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{W}_q \sigma_{j+k}^{(2n)}(\xi_q) & (4.87)\\
\Longleftrightarrow \int_{\mathcal{I}_{i+1/2}} \sigma_{j+k}^{(2n)}(\xi)d\xi &= \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{W}_q \sigma_{j+k}^{(2n)}(\xi_q), & (4.88)
\end{aligned}$$

comme $j + k$ varie de 0 à $2n$ et par hypothèse on a

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \mathcal{N} \geq 2n+1\\
&(ii) \quad \forall q = 1, 2, \ldots \mathcal{N} \quad \mathcal{W}_q = \widetilde{\mathcal{W}}(\xi_q), \text{ avec } \widetilde{\mathcal{W}} \in \mathbb{P}_{2n}(\mathcal{I}_{i+1/2}),
\end{aligned}$$

alors en vertu de la **propriété 5** il existe un unique polynôme $\widetilde{\mathcal{W}} \in \mathbb{P}_{2n}(\mathcal{I}_{i+1/2})$ vérifiant (4.88) pour tout $j+k$. Donc l'intégration numérique (4.81) est exacte dans $\mathcal{I}_{i+1/2}$ pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$ et pour tout polynôme $(UJ) \in \mathbb{P}_n(\Omega)$, ce qui termine la preuve.

□

En d'autres termes, il suffit qu'après chaque remaillage il existe suffisament de particules par maille pour intégrer exactement les moments de n'importe quelle fonction (UJ) polynômiale. La diffusion numérique introduite par le remaillage est ainsi limitée et on réinitialise le schéma numérique avec le nouveau maillage $\mathcal{M}$ et les moments définis par les particules dans $\mathcal{I}_{i+1/2}$

$$\forall 0 \leq k \leq n \quad \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{W}_q (UJ)_q \sigma_k(\xi_q) := M_{UJ,k}. \tag{4.89}$$

4.4 Remarques et discussion

Nous avons regroupé dans cette partie plusieurs remarques permettant de mieux appréhender la méthode. La manière d'imposer les conditions limites est discutée en premier lieu, puis nous regardons comment est réparti l'accroissement dans la maille, nous observons dans une troisième partie l'avantage d'utiliser des particules pour remailler avec précision dans une formulation lagrangienne, enfin nous précisons le comportement de la méthode face à une discontinuité de contact alignée avec le maillage.

4.4.1 Sur les conditions aux limites

Les conditions aux limites sont relativement naturelles et simples à implanter informatiquement dans la mesure où l'on impose, au choix, la solution du problème de Riemann (u^* ou p^*) aux nœuds des bords du domaine. Supposons que le nœud 0 soit en $\xi_0 = \xi_{min}$ au bord du domaine, alors on déduit les équations des conditions aux limites en utilisant (4.58-4.59).

Une condition aux limites de type piston est simulée par ($D \in \mathbb{R}$ est la vitesse du piston)

$$u_0^* = D \tag{4.90}$$
$$p_0^* = \widehat{p}_0 + (\widehat{\rho c})_0 (D - \widehat{u}_0), \tag{4.91}$$

le cas particulier $D = 0$ correspondant à un piston de vitesse nulle, c'est-à-dire un mur.

Une condition aux limites de type compression/dilatation, où $P \in \mathbb{R}^+$ est la pression régnant dans le monde extérieur au domaine de calcul, est simulée par

$$p_0^* = P \tag{4.92}$$
$$u_0^* = \frac{P - \widehat{p}_0}{(\widehat{\rho c})_0} + \widehat{u}_0, \tag{4.93}$$

le cas particulier $P = 0$ correspondant à la simulation du vide.
Remarquons que P et D n'ont aucune raison de demeurer des valeurs constantes au cours du temps, cette non uniformité ne pose aucun problème pour la méthode numérique (voir les cas tests 1D et 2D).
C'est d'ailleurs une des forces des méthodes lagrangiennes que de pouvoir imposer des conditions aux limites relativement complexes bien que leurs traductions numériques restent assez simples.

4.4.2 Sur la répartition des accroissements dans une maille

Supposons pour simplifier que nos données intiales (les fonctions (UJ)) soient constantes par maille et les pas de temps et d'espace égaux à 1, alors l'accroissement **moyen** dans une maille $I_{i+1/2}$ est donné par

$$\widehat{UJ} \equiv (UJ) \Longrightarrow F(\widehat{U}) \equiv F(U) \quad \text{sont des constantes,}$$

et

$$\begin{array}{lll} \text{les termes de bord} & \text{sont} & \left[F(U_i^*) - F(\widehat{U})\right] + \left[F(\widehat{U}) - F(U_{i+1}^*)\right] = \left[F(U_i^*) - F(U_{i+1}^*)\right] \\ \text{les termes intérieurs} & \text{sont} & \text{nuls car } \partial_\xi F(\widehat{U}) = 0. \end{array}$$

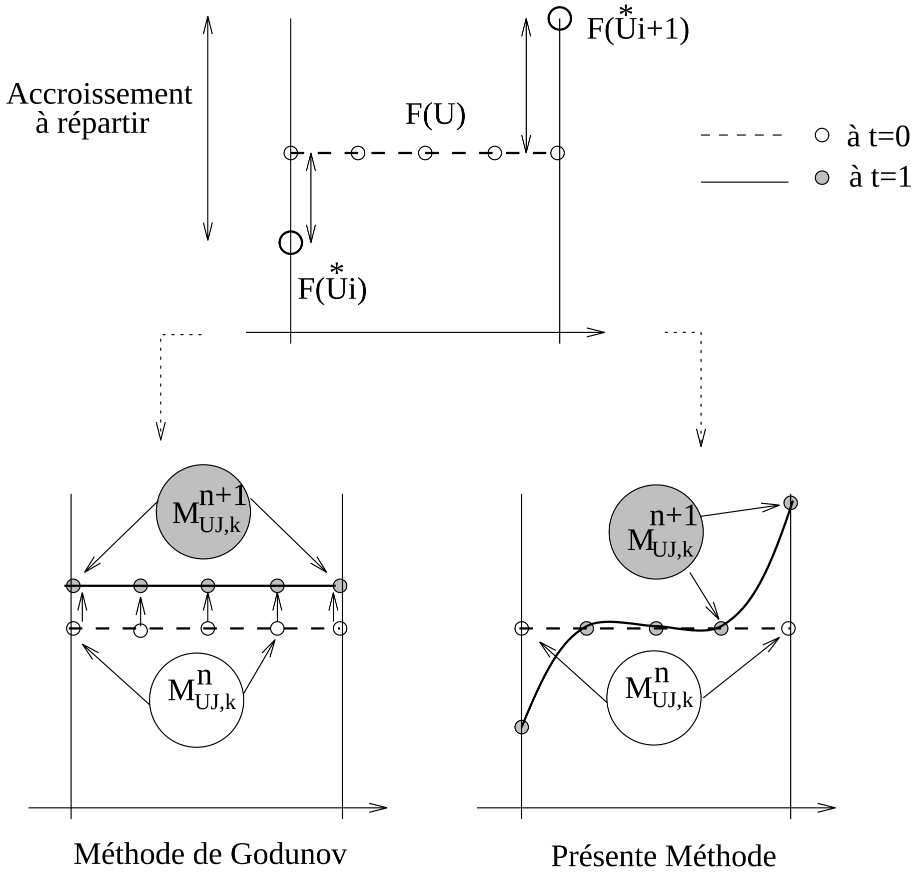


Figure 4.2: Répartition de l'accroissement dans une maille pour la méthode de Godunov et la méthode présentée (polynômes de degré (4))

L'accroissement moyen ne provient que des masses de Dirac des bords de la maille. Comme les données sont constantes par maille, $\left[F(U_i^*) - F(U_{i+1}^*)\right]$ est exactement la même valeur d'accroissement trouvée par le schéma de Godunov d'ordre 1. Pourquoi notre méthode ne s'identifie-t-elle alors pas au schéma de Godunov ?
La raison est liée à la manière de répartir cet accroissement dans la maille. Là où Godunov répartit uniformément $\left[F(U_i^*) - F(U_{i+1}^*)\right]$ sur les $n+1$ moments[3], nous imposons que la masse de Dirac $\left[F(U_i^*) - F(\widehat{U})\right]$ n'accroîsse que le moment $k=0$, et $\left[F(\widehat{U}) - F(U_{i+1}^*)\right]$ le moment $k=n$. De cette manière tous les autres moments ne sont pas accrus sur ce cycle. La différence avec Godunov est importante comme l'indique la figure 4.2, même si **en moyenne sur un seul cycle** l'accroissement calculé est le même par les deux schémas, la répartition de celui-ci dans la maille est totalement différente.
Dès le second cycle notre méthode n'utilise plus des moments constants dans la maille, mais un polynôme de degré (n) en guise de donnée initiale. En comparaison avec Godunov sur ce second cycle, outre les problèmes de Riemann qui n'ont plus les mêmes données intiales, nous avons désormais $\partial_\xi F(\widehat{U}) \neq 0$ à l'intérieur de la maille. Tous les moments seront *a priori* accrus pendant ce deuxième cycle.

4.4.3 Sur le déplacement des particules

Lors du remaillage ou de la visualisation des résultats, il est nécessaire de connaitre la position eulérienne des particules. Comme une particule lagrangienne ne change pas de position lagrangienne au cours du temps et que l'on connait la valeur de la vitesse en ce point (c'est le rapport des valeurs des polynômes (n)-diffusés définis dans l'unique triangle T tel que $\xi_p \in T$). Par exemple à t_{n+1}

$$\widehat{u}_p^{n+1} = \frac{\widehat{\rho u J}^{n+1}(\xi_p)}{\widehat{\rho J}^{n+1}(\xi_p)}, \tag{4.94}$$

et plus généralement pour t_k, $1 \leq k \leq n+1$

$$\widehat{u}_p^{k} = \frac{\widehat{\rho u J}^{k}(\xi_p)}{\widehat{\rho J}^{k}(\xi_p)}, \tag{4.95}$$

on est alors capable d'établir la formule suivante

$$X_p^{n+1} = \xi_p + \sum_{k=1}^{n+1} (\Delta t)_k\ \widehat{u}_p^k, \tag{4.96}$$

où X_p est la position eulérienne de la particule p, ξ_p sa position lagrangienne. Notons que $(\Delta t)_k$ est la valeur du pas de temps pour le $k$ème cycle. De plus $\widehat{u}_p^k$ dépend du numéro de la maille dans laquelle la particule est positionnée.
Enfin il est bon de remarquer qu'une particule positionnée sur un nœud ne pose aucun problème ni théorique ni pratique. Elle est décomposée en deux particules pour chacune des deux mailles. Chacune d'elles se déplace avec la vitesse de sa maille d'affectation (les polynômes sont discontinus d'une maille à l'autre ainsi l'est la vitesse).

4.4.4 Sur l'utilisation des particules pour projeter/remailler

L'utilisation de particules lors de la phase de projection/reconstruction du fluide sur un nouveau maillage offre de bonnes perspectives pour améliorer la précision du remaillage. En effet dans les méthodes lagrangiennes

[3]Même si formellement Godunov n'a qu'un seul moment, celui d'ordre 0

classiques il est nécessaire de déterminer la position eulérienne du maillage. En 2D par exemple, une maille initialement triangulaire ne le reste pas au cours du temps sauf dans les cas où la vitesse de déplacement du triangle est supposée linéaire ou constante. Dans les autres cas un triangle évolue généralement vers un objet que nous appellerons un patatoïde. Si l'on désire utiliser des polynômes de degré supérieur à 1 avec une méthode de Galerkin discontinu, le problème est d'être capable de projeter l'information sur une bonne approximation du patatoïde (anciennement un triangle).
Ne serait-ce qu'à l'ordre 2 (polynôme de degré 1) où l'on dispose de plusieurs vitesses pour chaque nœud du maillage, et d'une discontinuité de la vitesse à chaque arête, comment peut-on (doit-on) calculer la position du maillage déplacé ?
Une des techniques utilisées consiste à déplacer les nœuds du maillage à une vitesse issue d'un problème de moindre carré entre toutes les mailles possédant ce nœud comme sommet. Ainsi déplacés ces nœuds définissent un nouveau maillage si on considère que les connectivités n'ont pas changé. Cependant en plus de l'approximation faite sur la vitesse de déplacement du nœud s'ajoute celle sur les arêtes. Comme les nœuds sont déplacés non pas à leur vitesse propre mais à une approximation de celle-ci, la nouvelle arête n'est qu'une moyenne de l'arête « réelle ».
De tels processus sont effectués pour éviter le recouvrement/écartement des mailles et vraisemblablement c'est leur intérêt principal, car la diffusion numérique engendrée est assez forte.
Quels sont les processus équivalents pour des polynômes de degré n ? Sont-ils raisonnables ? Le déplacement des nœuds par une méthode des moindres carrés est toujours envisageable, mais les arêtes trouvées approchent-elles correctement les « arêtes » du patatoïde ? Le peu de travaux concernant des degrés supérieurs à 1 en GD ou Lagrange tendent à prouver que ce problème a faiblement été abordé jusqu'alors. Bien souvent certaines méthodes appelées GD en l'ALE ou en Lagrange, sont des méthodes restreintes à $\mathbb{P}_1$, non généralisables à $\mathbb{P}_n$; plus précisement la généralisation à $\mathbb{P}_n$ n'existe pas pour la phase de projection/remaillage.

L'utilisation de particules permet de s'affranchir en partie du problème de déplacement du maillage. En effet ces masses de Dirac ne sont qu'un artifice permettant de projeter l'information sur un domaine discret relativement simple. Les particules se déplacent avec la vitesse interne au triangle, dont la précision est liée à l'ordre de précision du schéma numérique. On n'a jamais besoin de définir où se trouve le maillage lagrangien en coordonnées d'Euler ; d'ailleurs en 2D pour des polynômes de degré $\mathbb{P}_n$, $n > 1$ ce serait impossible. Comme par définition une particule reste dans sa maille lagrangienne au cours du temps et comme nous connaissons sa position eulérienne, nous pouvons suivre la matière même si nous n'avons pas accès au maillage déplacé (dont nous n'avons d'ailleurs pas besoin).
De la diffusion numérique ne sera ajoutée que lorsque l'on choisira le nouveau maillage et que des particules provenant de mailles initialement différentes seront associées dans une maille commune, cette diffusion sera réduite avec l'augmentation du nombre de particules dans le domaine.

De plus, l'adjonction aux particules d'un poids volume ω_p destiné à suivre les évolutions du jacobien, permet de réinitialiser le jacobien dans le nouveau maillage à une valeur différente de 1. Ce n'est pas le cas des méthodes lagrangiennes classiques qui débutent leur calcul après chaque remaillage avec $J = 1$ partout. Elles oublient totalement l'information portée par J juste avant le remaillage et cet oubli est équivalent à un processus de diffusion numérique. D'ailleurs les recherches actuelles tendent à privilégier un nombre maximal de cycles purement lagrangiens entre les projections/remaillages, ce qui nous semble significatif de la mauvaise qualité (du point de vue précision) des projections/remaillages.
A la différence dans notre méthode nous conservons la valeur du jacobien, à la précision du nombre de particule près, et nous ne réinitialisons donc pas $J = 1$ sur le domaine de calcul. Comme la méthode est assez stable, nous n'avons que très peu besoin de remailler au cours du temps : un nombre maximal de cycle purement lagrangien est ainsi réalisé, le coût du remaillage est alors fortement réduit.

4.4.5 Sur le traitement des discontinuités de contact alignées avec le maillage

Une discontinuité de contact (ddc) est caractérisée par un saut de densité de part et d'autre d'une discontinuité, alors que la vitesse u et la pression p sont constantes. La méthode numérique rend compte exactement de telles discontinuités lorsqu'elles sont alignées avec le maillage. En effet, on remarque aisément que les termes intérieurs sont nuls pour les deux mailles séparés par la ddc car les données sont constantes sur ces deux mailles. Le saut sur le bord est aussi nul puisque le solveur de Riemann nous rend $u^* = u$ et $p^* = p$. De ce fait tous les accroissements sont nuls. Seules les particules se déplacent à la vitesse u.
La solution donnée par le schéma numérique est la donnée initiale déplacée à la vitesse u durant le pas de temps, c'est-à-dire la solution exacte.

Chapter 5

Essais numériques en une dimension d'espace

La méthode monodimensionnelle est testée dans ce chapitre. Plusieurs cas classiques de mécanique des fluides ont été simulés, les résultats sont présentés et commentés dans le paragraphe **5.1**. Il s'agit en particulier de tubes à choc (Sod, Shu/Osher, Blastwave), de détentes, et d'un tube à choc avec deux équations d'état (encore appelé bimatériaux). Dans le paragraphe **5.2** on teste le processus de remaillage seul en approchant des fonctions continues par une population de particules.

Le schéma numérique utilisé est construit à partir des polynômes d'ordre (2) ; les données sont donc paraboliques par maille, le jacobien est toujours initialisé à 1. Toutes les courbes sont tracées à partir des 3 moments par maille $M_{UJ,k}$ à l'instant final : soit une moyenne sur $I_{i+1/2}$ est placée au milieu de la maille où $\overline{U}_{i+1/2} = \frac{\sum_{k=1}^{3} M_{UJ,k}}{\sum_{k=1}^{3} M_{J,k}}$ et $X_i^{n+1} = \xi_i + \sum_{m=0}^{n}(t_{m+1} - t_m)u_i^{*,m+1/2}$, soit on trace le polynôme $\widehat{U}$ dans la maille, ou encore on présente la population de particules sur laquelle l'information a été projetée.

Dans tous les cas tests en mécanique des fluides, **aucun remaillage n'a été nécessaire**. Cela signifie que nous n'avons jamais détecté de situation critique ($\Delta t \to 0$). Pour certains cas le pas de temps s'est naturellement adapté à la situation physique sans jamais avoir le jacobien négatif ou trop proche de zéro. De ce fait toute la première partie a été calculée sans avoir recours aux particules ! C'est pourquoi la seconde partie est entièrement consacrée aux tests de remaillage. Nous verrons cependant qu'en 1D l'intérêt du remaillage est très relatif, par contre en 2D, en particulier lors de la simulation du glissement, le remaillage à l'aide de particules prend tout son intérêt.

5.1 Cas test en mécanique des fluides 1D

Les données initiales sont représentées sur un domaine Ω par deux états Gauche $X < X_d$ et Droite $X > X_d$, sauf mention contraire. Lorsque les solutions exactes sont disponibles elles sont précisées avec les références les justifiant, et représentées en trait plein sur les graphiques. On représente aussi en trait plein les solutions numériques issues de schémas classiques, qui font office de solutions de référence.

5.1.1 Double détente, détente dans le vide

Intéressons-nous dans un premier temps à la simulation d'ondes de détente : une double détente avec création d'une zone proche du vide, et une détente dans le vide.
La solution exacte d'une détente à Gauche connaissant u^* et p^* est donnée par les équations (X_d étant la position de la discontinuité)

$$\rho = \rho_G \left(\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)c_G} \left(u_G - \frac{X - X_d}{t} \right) \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \tag{5.1}$$

$$u = \frac{2}{\gamma+1} \left(c_G + \frac{\gamma-1}{2} u_G + \frac{X - X_d}{t} \right) \tag{5.2}$$

$$p = p_G \left(\frac{\rho}{\rho_G} \right)^{\gamma}, \tag{5.3}$$

et les vitesses de la tête et du pied de la détente sont données par

$$u_T = u_G - c_G \tag{5.4}$$

$$u_P = u^* - c_G \left(\frac{p^*}{p_G} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}. \tag{5.5}$$

Dans le cas d'une onde de détente à Droite on a

$$\rho = \rho_D \left(\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)(-c_D)} \left(u_D - \frac{X - X_d}{t} \right) \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \tag{5.6}$$

$$u = \frac{2}{\gamma+1} \left(-c_D + \frac{\gamma-1}{2} u_D + \frac{X - X_d}{t} \right) \tag{5.7}$$

$$p = p_D \left(\frac{\rho}{\rho_D} \right)^{\gamma}, \tag{5.8}$$

et les vitesses de la tête et du pied de la détente sont données par

$$u_T = u_D + c_D \tag{5.9}$$

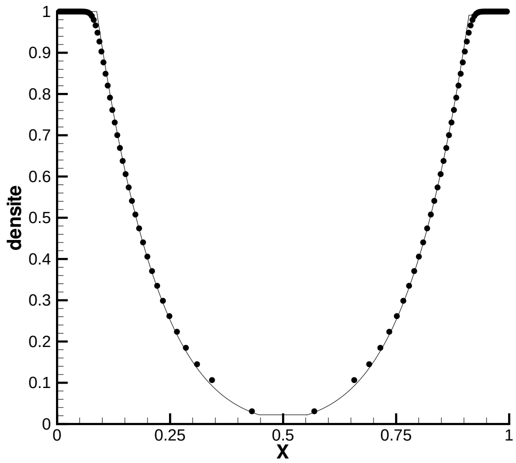
$$u_P = u^* + c_D \left(\frac{p^*}{p_D} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}. \tag{5.10}$$

Double détente

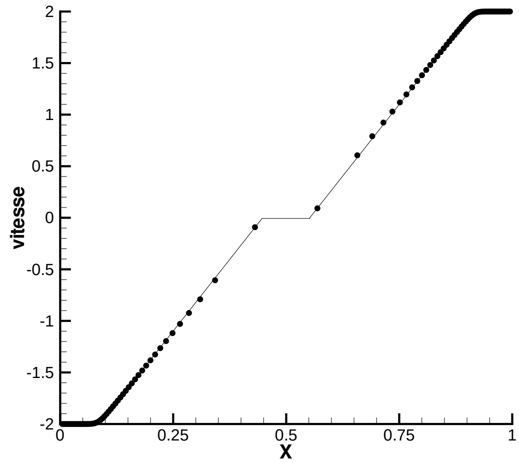
Les données initiales sont les suivantes

	Etat G	**Etat D**
ρ	1.0	1.0
u	-2.0	2.0
p	0.4	0.4

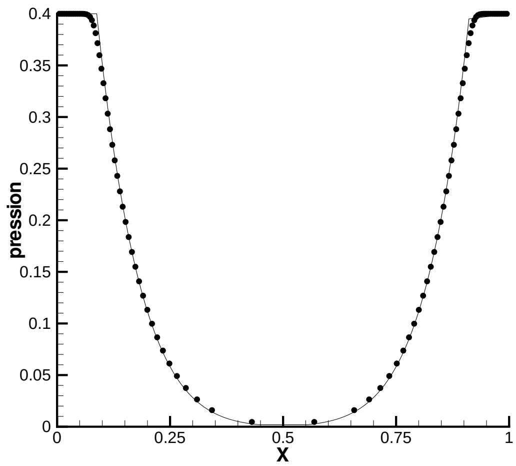
La solution exacte est constituée de deux fortes détentes initiées en $X_d = 1/2$, se déplaçant avec une vitesse négative et positive respectivement. Elles sont séparées par une discontinuité de contact stationnaire et triviale. L'état central est proche du vide ; la densité et la pression sont proches de zéro, par contre l'énergie interne



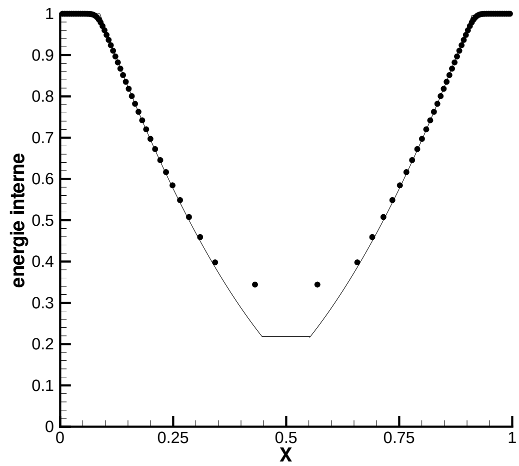
Densité



Vitesse



Pression



Energie interne

Figure 5.1: Double détente - maillage uniforme à 100 mailles

$\epsilon = p/(\rho(\gamma - 1))$ ne l'est pas.
Le maillage utilisé est constitué de 100 mailles régulières sur $[0.3, 0.7]$. Les conditions aux limites sont $u_0^* = -2.0$ et $u_M^* = 2.0$ et le temps d'arrêt $T = 0.15$. Dans ce cas test le limiteur n'a pas été activé, le schéma étant stable par ailleurs. Les résultats sont représentés dans la figure 5.1 avec les solutions exactes.
On se place sur $\Omega = [0.3, 0.7]$ de manière à ce que le domaine Ω soit $[0, 1]$ à $T = 0.15$ et pouvoir comparer avec d'autres méthodes, eulériennes en particulier. D'ailleurs la comparaison avec [51] est instructive, tous les schémas eulériens testés dans ce papier (schéma composite CFLF, schéma hybride CFLFh, schéma centré de Jiang-Nessyahu-Tadmor JT, schéma Clawpack de Le Veque, les schémas à flux moyens *Weighted average flux* WAF, schémas WENO5 et CWENO3 (C pour *conservative*, 5 et 3 étant les ordres de précision théoriques) et PPM de Woodward et Collela) ne rendent pas correctement l'énergie interne dans le figure 5.2[1]. Dans notre méthode nous voyons qu'elle est correctement approchée. Avec un maillage plus fin (250 mailles régulières) on atteint la solution exacte (voir la figure 5.3).

Détente dans le vide

Les données initiales sont les suivantes sur $\Omega = [0.85, 1.0]$ borné par un mur à gauche et une zone de vide à droite

	Etat 0
ρ	1
u	0
p	0.4

La solution exacte est composée d'une détente dans le vide à droite. La densité et la pression chutent continûment vers 0, la vitesse atteint une valeur maximale au point de densité nulle. Les vitesses de la tête et du pied de l'onde sont

$$u_T = u_0 + \frac{2}{\gamma - 1} c_0 \tag{5.11}$$

$$u_P = c_0, \tag{5.12}$$

les équations pour la densité, la vitesse et la pression sont données par (5.6-5.8).
Les conditions aux limites sont $u_0^* = 0$ et $p_M^* = 0$ pour un maillage uniforme à 100 mailles et 2000 mailles. Le limiteur n'est pas actif.
La vitesse de la tête de la détente est sous-estimée par tous les schémas numériques, la méthode présentée n'y fait pas exception, cependant le raffinement du maillage permet de mieux approcher la valeur exacte d'avancée de front (figure 5.4). Le corps de la détente est cependant assez bien approché. Du point de vue du bilan de quantité de mouvement, l'erreur faite est faible malgré les écarts important sur les courbes. Cela vient du fait que l'erreur porte sur une très petite quantité de matière.

5.1.2 Tube à choc de Sod

Les données initiales sont les suivantes

[1] Voir l'article de Wendroff *et al* [51] pour une description plus précise des dix schémas numériques eulériens testés.

Test 2

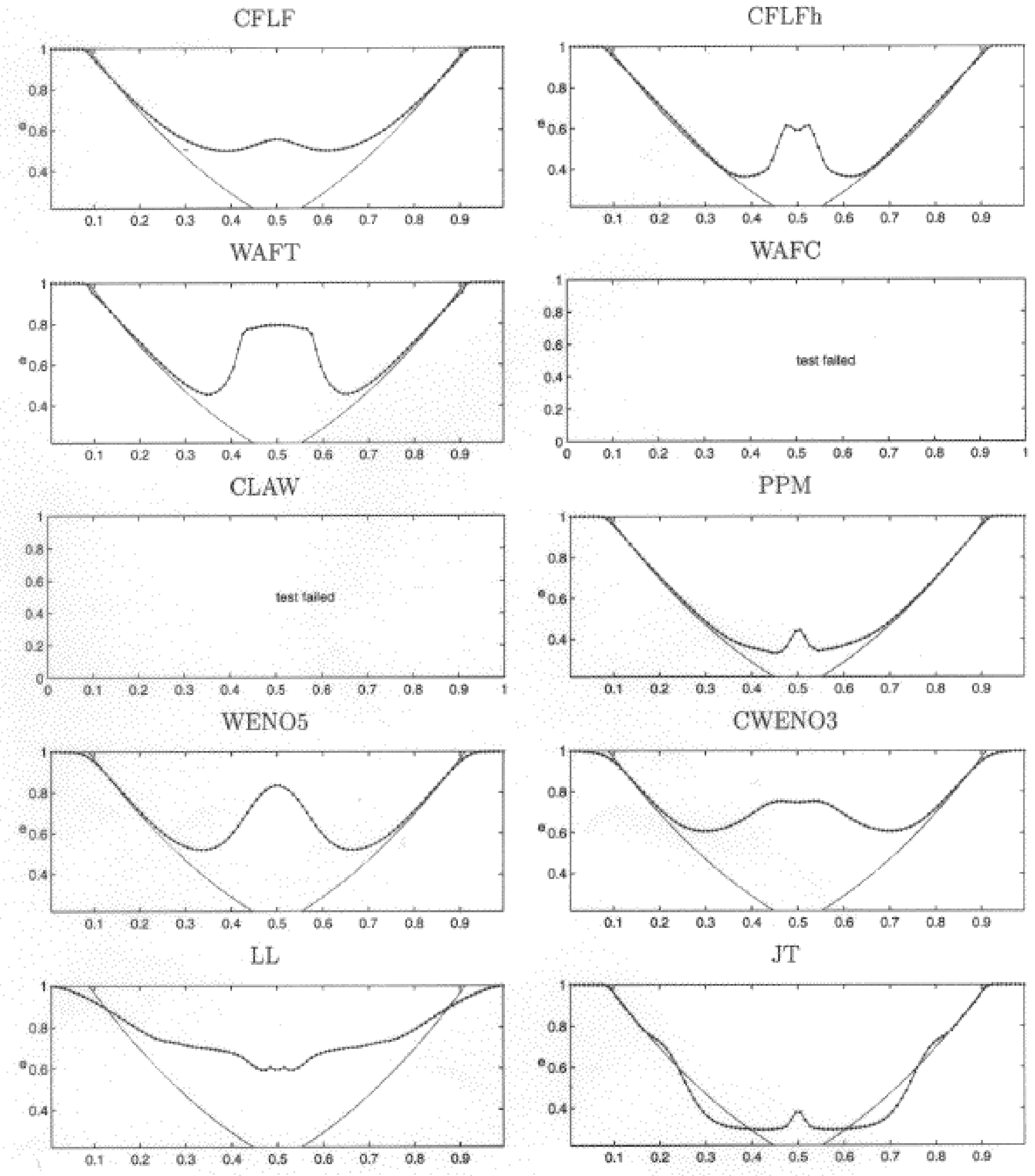


Figure 3: 1D results (internal energy) for the test 2 problem by all ten schemes.

Figure 5.2: Double détente - énergie interne - maillage uniforme à 100 mailles *Wendroff et al* [51]

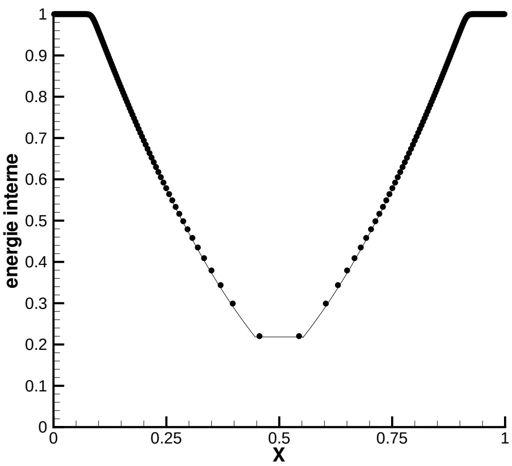


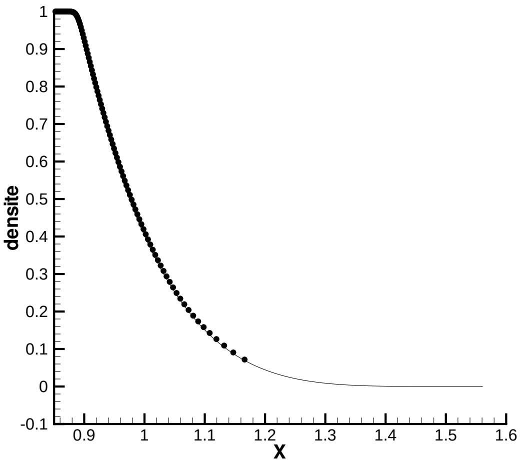
Figure 5.3: Double détente - énergie interne - maillage uniforme à 250 mailles

	Etat G	**Etat D**
ρ	1	0.125
u	0	0
p	1	0.1

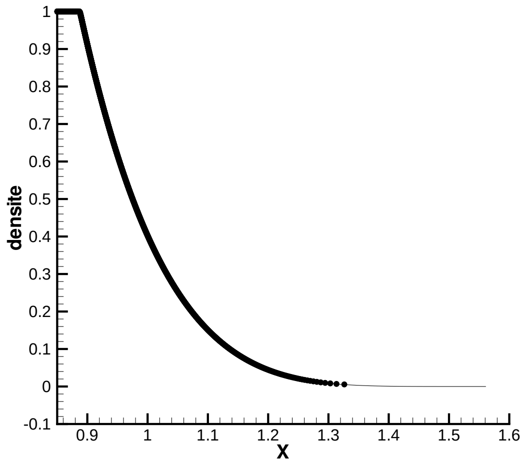
La discontinuité est positionnée en $X_d = 0.5$ sur le domaine $\Omega = [0, 1]$. Au temps $T > 0$ la solution exacte est composée d'une détente se propageant vers la gauche, d'une discontinuité de contact vers la droite et d'une onde de choc vers la droite. La solution exacte est décrite dans le tableau suivant pour tout $T > 0$ ([17])

	Avant Détente	**Détente**	**ddc G**	**ddc D**	**Après Choc**
ρ	1	équ.(5.1)	0.42632	0.26557	0.125
u	0	équ.(5.2)	0.92745	0.92745	0
p	1	équ.(5.3)	0.30313	0.30313	0.1

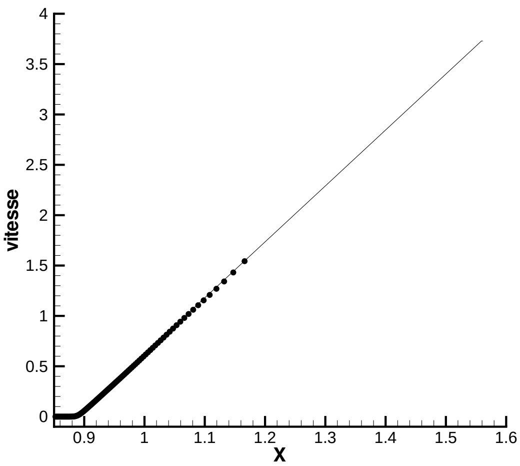
Ce test permet de mesurer la pertinence de la méthode pour rendre compte de différentes ondes, leur position, ainsi que les valeurs des plateaux. Le nombre de maille d'étalement du choc est une mesure empirique de la précision de la méthode sur ce type d'onde.
Les conditions aux limites sont $u_0^* = 0$ et $u_M^* = 0$ pour un maillage uniforme à 100 mailles. Les courbes tracées à $T = 0.153$ représentent la densité, la vitesse, la pression et le jacobien (figures 5.5). D'un point de vue chronométrie les ondes sont bien positionnées. La détente est bien résolue malgré le petit nombre de mailles. La discontinuité de contact est bien rendue malgré les légères sous-estimations à gauche et à droite. Celles-ci proviennent du limiteur au premier cycle de calcul ; en effet au premier cycle le limiteur est actif puisque la maille de droite se comprime. Cette erreur est ensuite propagée au cours du temps. Le choc est étalé sur une à deux maille(s) avec une légère oscillation. Une étude plus poussée du limiteur permettrait certainement de réduire cette oscillation parasite.
On donne à titre d'exemple le résultat donné par le code de calcul lagrangien SAIGON utilisé au CEA. Ce code est fondé sur la méthode numérique de Von-Neumann-Richtmyer datant des années 1950. La figure 5.6 montre la densité et la pression données par les deux méthodes. On a joint par un trait plein les moyennes par mailles données par SAIGON ($\circ$), la solution exacte étant tracée en trait plein sur les courbes de la méthode présentée.



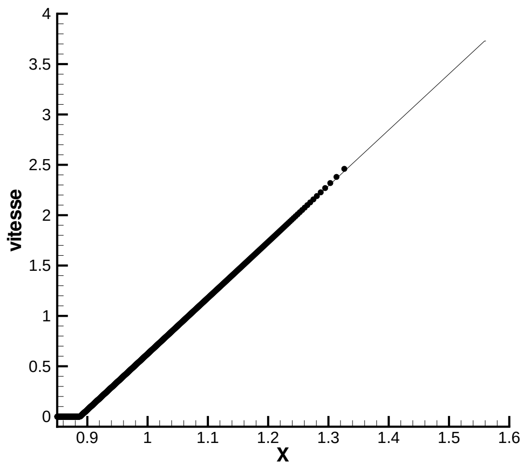
Densité avec 100 mailles



Densité avec 2000 mailles

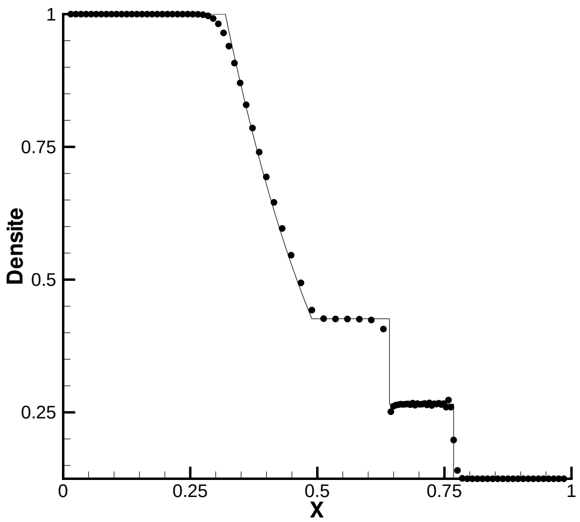


Vitesse avec 100 mailles

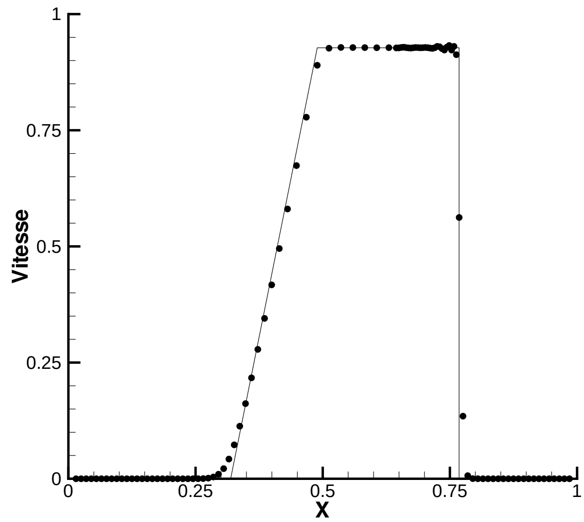


Vitesse avec 2000 mailles

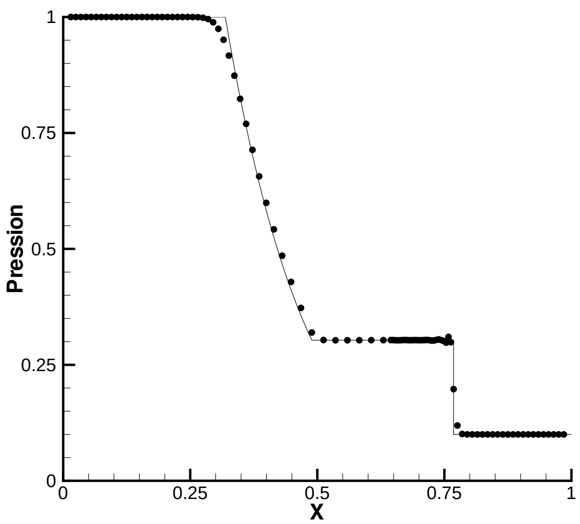
Figure 5.4: Détente dans le vide - Densité et vitesse pour 100 et 2000 mailles



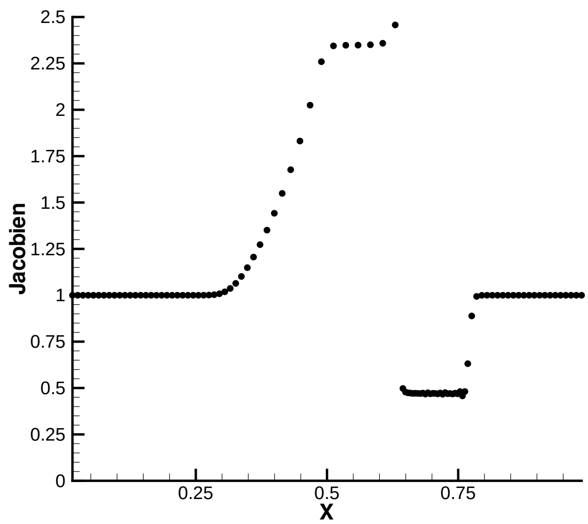
Densité avec 100 mailles



Vitesse avec 100 mailles

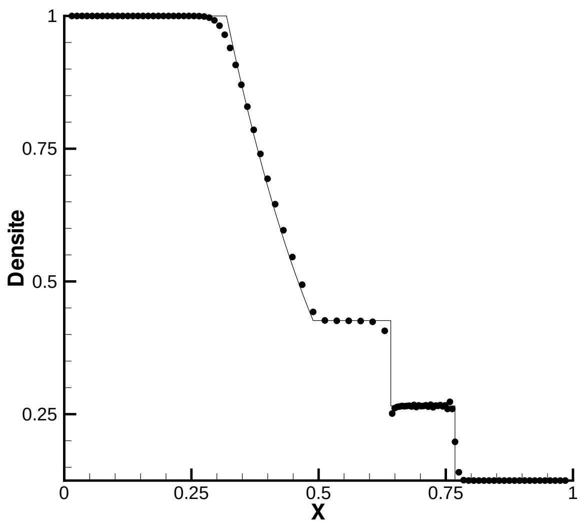


Pression avec 100 mailles

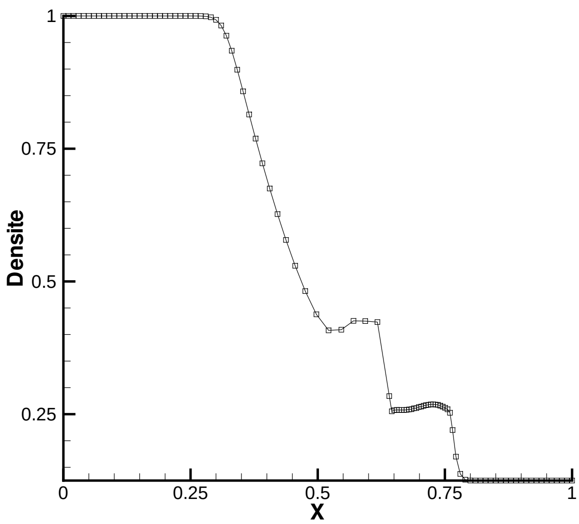


Jacobien avec 100 mailles

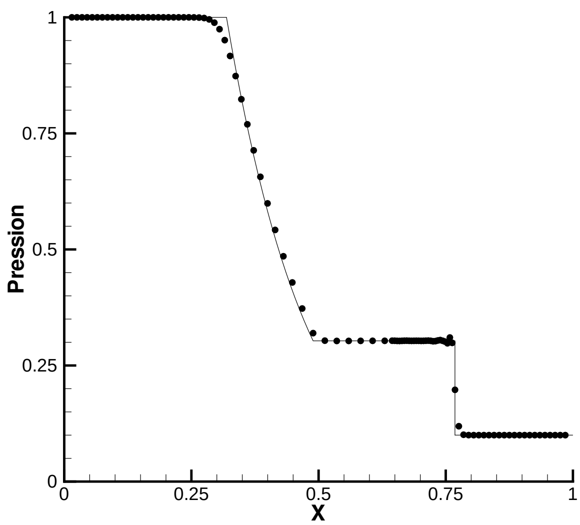
Figure 5.5: Tube à choc de Sod - maillage uniforme à 100 mailles



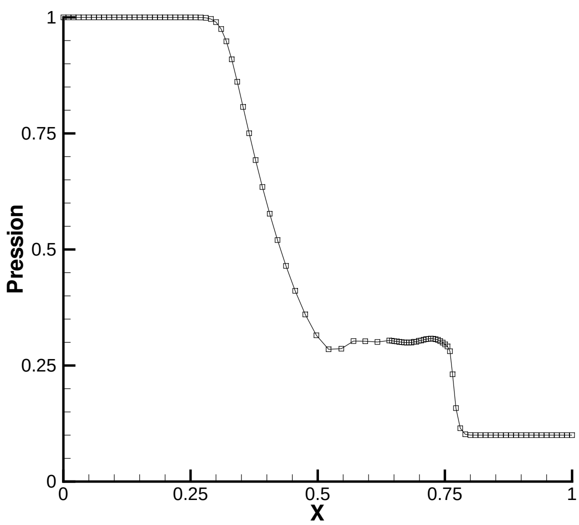
Densité avec la présente méthode



Densité avec le code SAIGON



Pression avec la présente méthode



Pression avec le code SAIGON

Figure 5.6: Tube à choc de Sod - maillage uniforme à 100 mailles - Comparaison entre le code SAIGON et la méthode présentée

5.1.3 Tube à choc oscillant de Shu/Osher

Sur le domaine $\Omega = [-9.7322, 5]$ on initialise le calcul par deux états séparés en $X_d = -4$ tels que

	Etat G	**Etat D**
ρ	3.857	$1 + 0.2\sin(5X)$
u	2.629	0
p	10.333	1.0

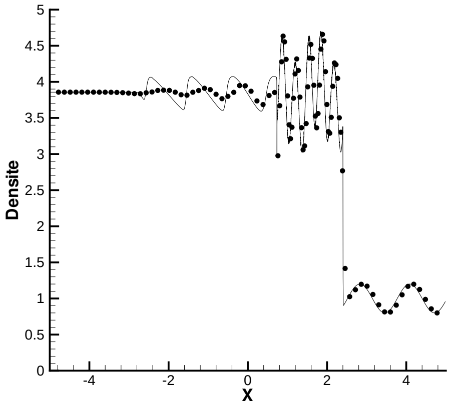
Il s'agit d'initier une onde de choc qui rencontre un état inhomogène dont la densité varie sinusoïdalement. Il n'existe pas de solution exacte à ce problème, seule une solution à 2000 mailles sera utilisée comme solution de référence en trait plein.
Les conditions aux limites sont $u_0^* = 2.629$ et $u_M^* = 0$. Sur des maillages initiaux à 200 et 400 points on trace pour le temps $T = 1.8$ les moyennes de la densité avec $\bullet$, voir la figure 5.7. La solution numérique est d'autant meilleure que l'ordre de précision du schéma en espace est élevé.
L'abscisse du nœud en condition limite à gauche est $X_{min} = -9.7322$, de cette manière au temps $T = 1.8$ ce nœud se trouve en $X_{min} + uT = -5$, il devient alors possible de comparer nos résultats lagrangiens avec des résultats eulériens sur $[-5, 5]$ obtenus avec le même nombre de maille ([1]).
Comparons notre schéma en $\mathbb{P}_2$ avec un schéma d'ordre 1 ($\mathbb{P}_0$), nous prenons 400 mailles pour le schéma d'ordre 1 et 100 ou 200 mailles pour le schéma $\mathbb{P}_2$ alors on obtient la figure 5.8. Le schéma d'ordre 0 est représenté par des $\circ$ et un trait en pointillé, le schéma quasi d'ordre 3 par des $\bullet$ et un trait plein.
On remarque que si l'ordre 3 était effectivement atteint on aurait qualitativement une superposition des courbes dans l'encart de gauche. Les courbes de droite sont bien plus proches ce qui semble indiquer que l'ordre effectif de précision est supérieur à 2 tout en étant inférieur à 3.

5.1.4 Problème de Woodward et Collela : Blastwave

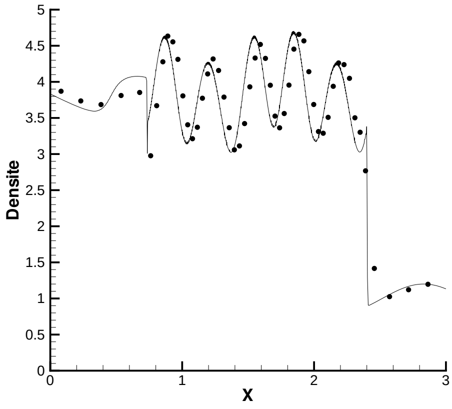
Sur le domaine $\Omega = [0, 1]$ on intialise le problème à trois états suivant

	Etat G	**Etat C**	**Etat D**
ρ	1	1	1
u	0	0	0
p	1000	0.01	100

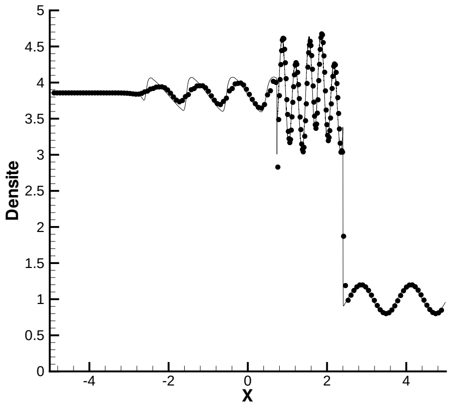
les états Gauche et Centre sont séparés en $X_1 = 0.1$, les états Centre et Droit sont séparés en $X_2 = 0.9$. La première discontinuité se scinde en trois ondes de la gauche vers la droite : une détente, une discontinuité de contact et un choc. La deuxième se scinde en un choc, une discontinuité de contact et une détente. Après un certain temps les détentes sortent du domaine, les deux ondes de choc collapsent puis se séparent pendant que les deux discontinuités de contact traversent cette zone de recombinaison d'ondes. Il n'existe pas de solution exacte à proprement parlé, mais la sévérité de ce cas en a fait une référence et des solutions approchées de comparaison sont généralement présentées avec les schémas numériques qui supportent ce cas.
Le maillage est composé de 400 mailles uniformes. Les courbes présentées sont les moyennes par maille de la densité et la vitesse à $T_1 = 0.026$, $T_2 = 0.028$, $T_3 = 0.030$, $T_4 = 0.032$, $T_5 = 0.034$, $T_6 = 0.038$. Les moyennes sont connectées par des lignes droites pour mieux illustrer la position des discontinuités dans la figure 5.9. Les défauts déjà observés (autour de la ddc du tube de Sod par exemple) sont accentués au passage des chocs et on les retrouve comme « pics » de densité. Cependant la solution approchée est très proche de la solution à la convergence donnée par des schémas raisonnables (voir pour comparaison [44]). Les courbes des figures 5.11,



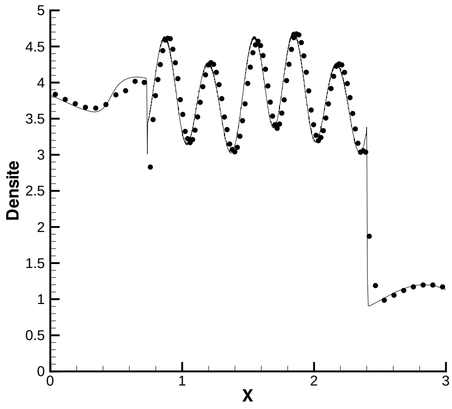
Densité moyenne 100 mailles



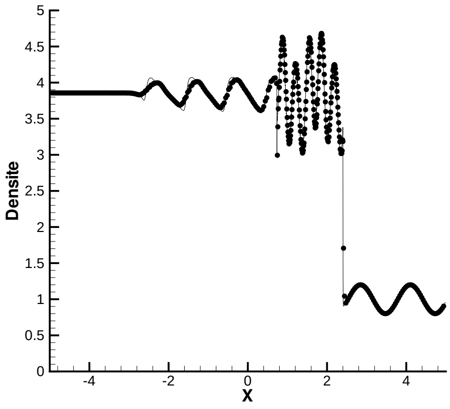
Zoom



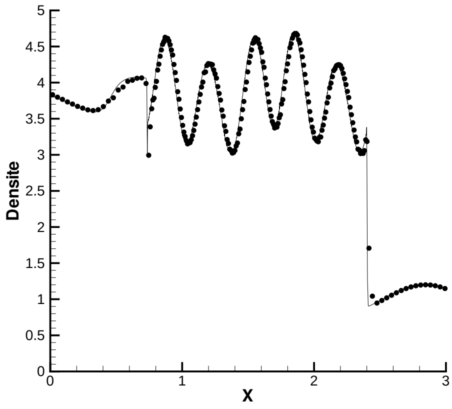
Densité moyenne 200 mailles



Zoom

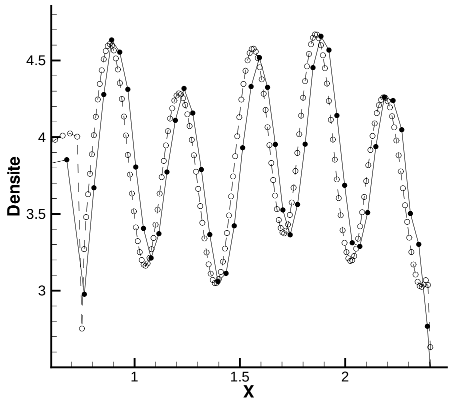


Densité moyenne 400 mailles



Zoom

Figure 5.7: Tube à choc oscillant de Shu/Osher - 100, 200, 400 mailles uniformes



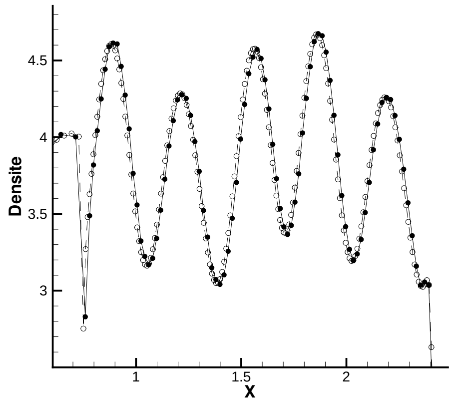


Figure 5.8: Tube à choc oscillant de Shu/Osher (comparaison) - ○ sch. d'ordre 1 avec 400 mailles - • sch. quasi d'ordre 3 avec 100 mailles (gauche) ou 200 mailles (droite)

5.12, présentent les résultats donnés par le dix schémas eulériens précédemment cités pour respectivement 400 et 2000 mailles uniformes. Elles sont à comparer avec la dernière courbe de gauche de la figure 5.10 issue de la présente méthode.

5.1.5 Tube à choc bimatériaux

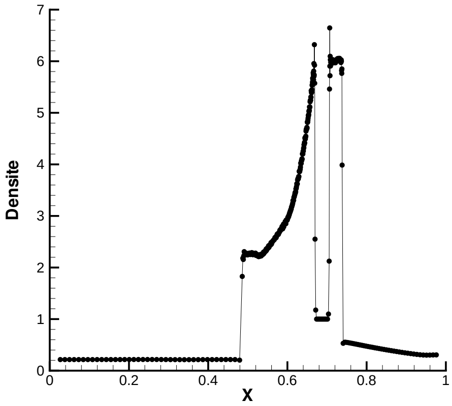
Nous allons montrer expérimentalement que le choix de l'équation d'état est neutre. Nous nous plaçons dans le modèle de fluides gouvernés par l'équation d'état dîte *stiffened gaz*

$$p = (\gamma - 1)\rho(e - \frac{1}{2}u^2) - \gamma\pi_\infty. \tag{5.13}$$

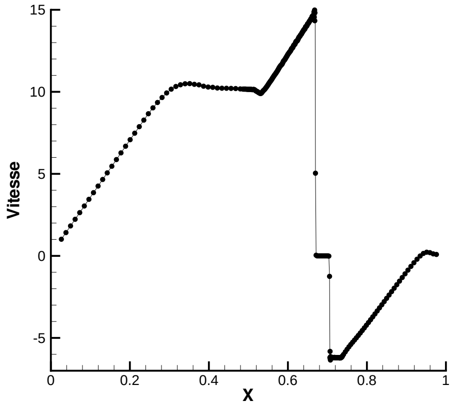
Les constantes γ et π_∞ sont des constantes caractéristiques des matériaux. On retrouve l'équation des gaz parfaits lorsque γ est le rapport des chaleurs spécifiques et $\pi_\infty = 0$. Dans des conditions de forte pression l'équation (5.13) est une approximation raisonnable pour les gaz, les liquides et les solides. Quelques valeurs caractéristiques de certains matériaux sont données dans le tableau suivant.

	Air	**Eau**	**Cuivre**	**Granit**
densité (kg/m^3)	1	998	8924	2627
γ	1.4	4.4	4	2.6
π_∞ (Pa)	0	6.10^8	341.10^8	142.10^8

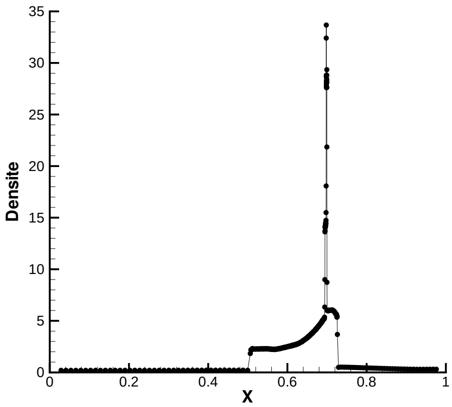
Nous testons la méthode sur un problème de type tube à choc où les variables sont fortement discontinues. Ce tube à choc est constitué d'un liquide à forte pression à gauche et d'un gaz à faible pression à droite, soit



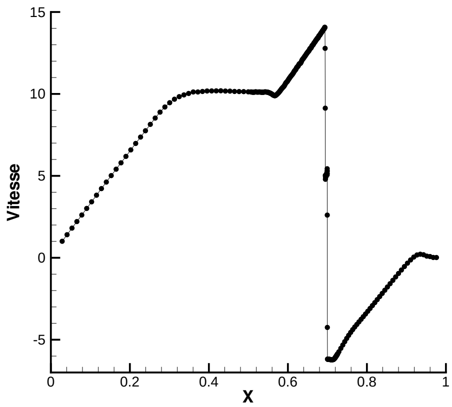
Densité à T_1



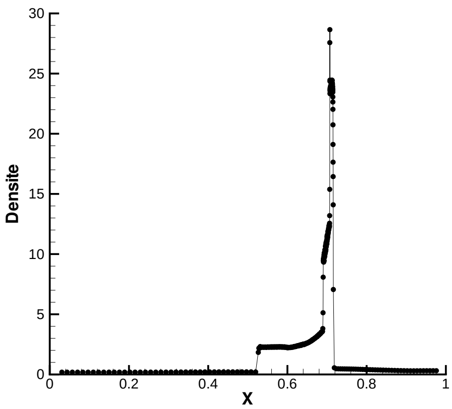
Vitesse à T_1



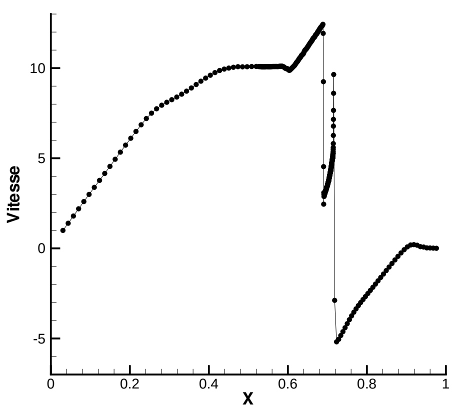
Densité à T_2



Vitesse à T_2

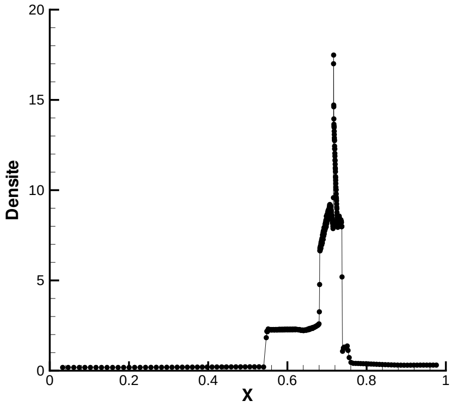


Densité à T_3

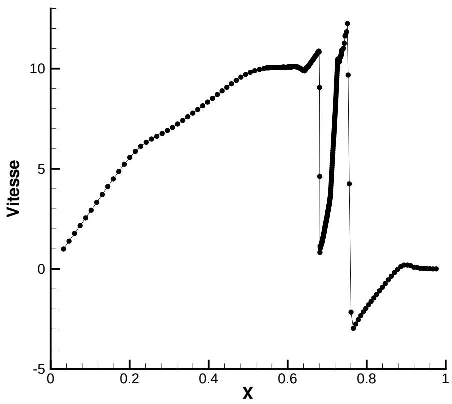


Vitesse à T_3

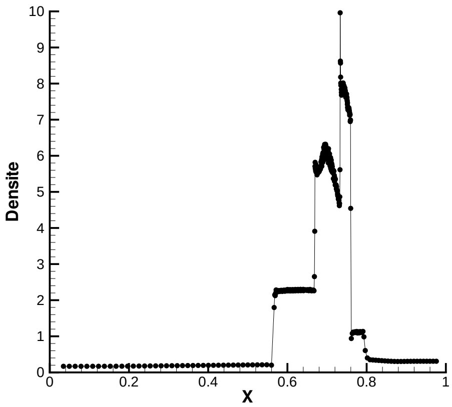
Figure 5.9: Blastwave - Densité/Vitesse à T_i pour 400 mailles



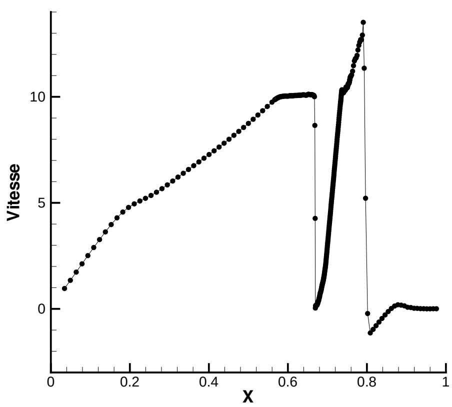
Densité à T_4



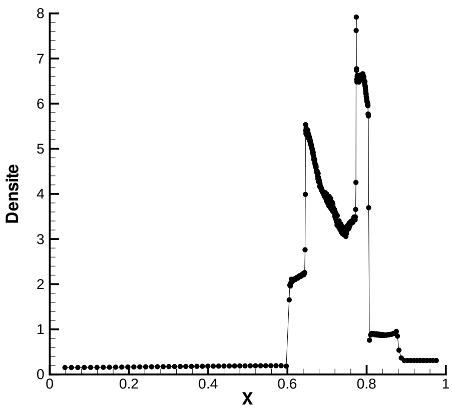
Vitesse à T_4



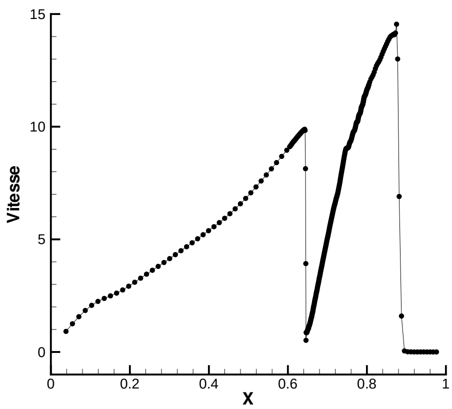
Densité à T_5



Vitesse à T_5



Densité à T_6



Vitesse à T_6

Figure 5.10: Blastwave (suite)

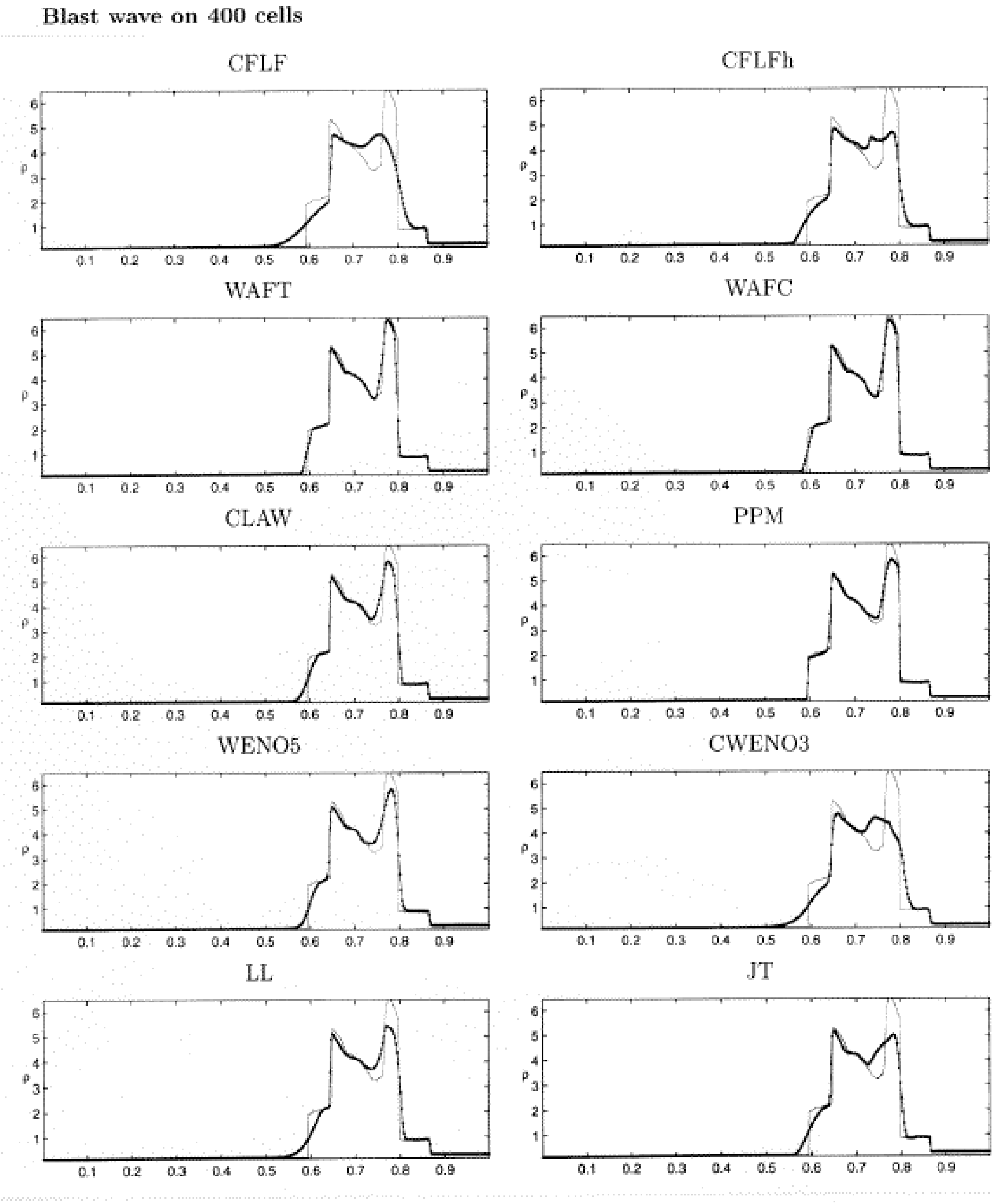


Figure 11: 1D results (density) for the blast wave problem by all ten schemes.

Figure 5.11: Blastwave - maillage uniforme à 400 mailles issu de *Wendroff et al* [51]

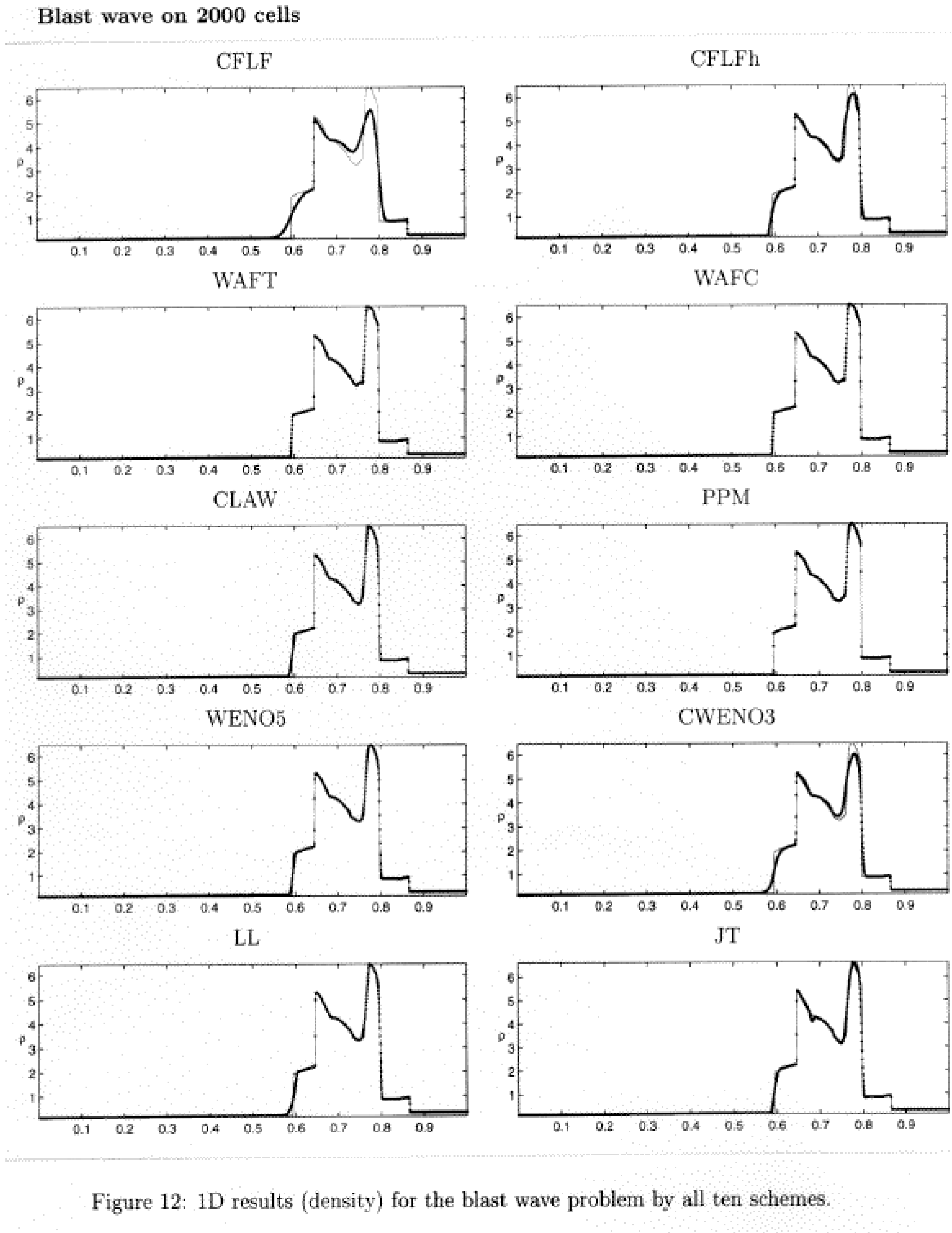


Figure 5.12: Blastwave - maillage uniforme à 2000 mailles issu de *Wendroff et al* [51]

	Etat G	Etat D
ρ	1000	50
u	0	0
p	10^9	10^5
γ	4.4	1.4
π_∞	6.10^8	0

La discontinuité est placée en $X_d = 0.7$ dans $\Omega = [0,1]$. Les conditions aux limites sont de type mur : $u^* = 0$. On a placé 500 mailles uniformes sur le domaine et le calcul est stoppé à $T = 238\ 10^{-6}$, on présente les courbes des moyennes de la densité, la vitesse, la pression dans la figure 5.13. Les solutions exactes ne sont pas tracées pour éviter d'encombrer les courbes, mais on remarque aisément que les trois ondes sont bien rendues. L'oscillation sur la densité à l'interface est aussi présente dans [52] avec un solveur de Riemann exact ou de type HLL, il est précisé que ce type d'oscillation est présent aussi pour des calculs monomatériaux. Dans la figure 5.14 on trace trois temps physiques $T_1 = 56.\ 10^{-6}$ (bleu), $T_2 = 118.\ 10^{-6}$ (rouge), et $T = 238.\ 10^{-6}$ (noir) pour les variables densité, vitesse, pression. A titre de comparaison on se reportera aux articles [47] et [46] qui présentent des solutions numériques obtenues avec différentes méthodes eulériennes.

5.1.6 Discussion

Ces différents tests montrent que la méthode se comporte bien sur ces cas classiques. Malgré les fortes ondes de choc **aucun remaillage** n'a été nécessaire. La quasi absence d'oscillation numérique n'y est vraisemblablement pas étrangère. En effet dans les méthodes lagrangiennes classiques les oscillations numériques engendrent un jacobien assez perturbé, le pas de temps en souffre directement ainsi que la robustesse. Il ne semble pas qu'il en soit de même ici. Au grès des simulations le pas de temps augmente/diminue en fonction de la valeur du jacobien sans pour autant qu'il faille remailler le domaine.
Il est bon de noter que le limiteur utilisé ne cherche jamais à corriger des extrema, comme le ferait un limiteur classique. Il nous semble clair qu'un travail plus approfondi sur les limiteurs pour ce type de méthode améliorerait les résultats pour ce qui concerne les légères oscillations parasites.

5.2 Cas test de remaillage

Cette partie met en pratique le remaillage décrit dans la partie **4.3**. Nous approchons une fonction $f(X)$ par une population de particules sur un maillage donné. Après avoir changé de maillage nous comparons la solution numérique à $f(X)$, la solution exacte.
Sur un domaine $\Omega = [-\pi, \pi]$ on approche la fonction sur un maillage M_0 (uniforme à 100 mailles) par ses trois moments d'ordre 2 dans chaque maille. On se donne une population de 12 particules par maille. Un nouveau maillage M_1 est choisi comme perturbation de M_0. Chaque nœud de M_0 est déplacé aléatoirement de $\pm K\%$ de la taille de la maille ($0 \leq K \leq 40$) en vérifiant toujours que $N_{i+1/2} \geq 6$ pour toutes les mailles $I_{i+1/2}$. Sur le nouveau maillage on calcule les poids $\mathcal{W}_p$ de chaque particule, on compare alors les moments donnés par les particules aux moments exacts.

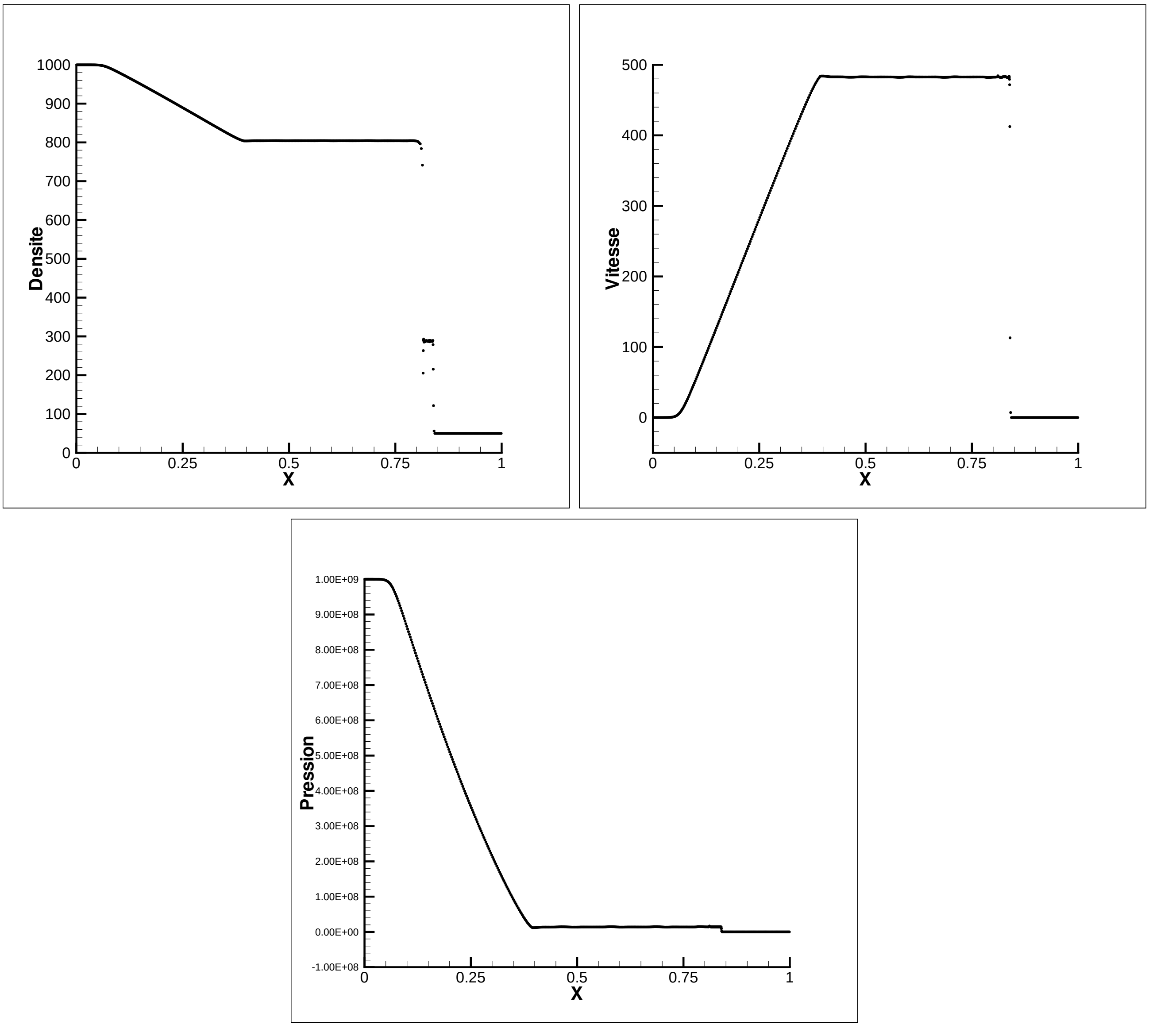


Figure 5.13: Tube à choc bimatériaux - Maillage uniforme à 500 mailles - Densité, Vitesse, Pression moyenne dans les mailles - $T = 238\ 10^{-6}$

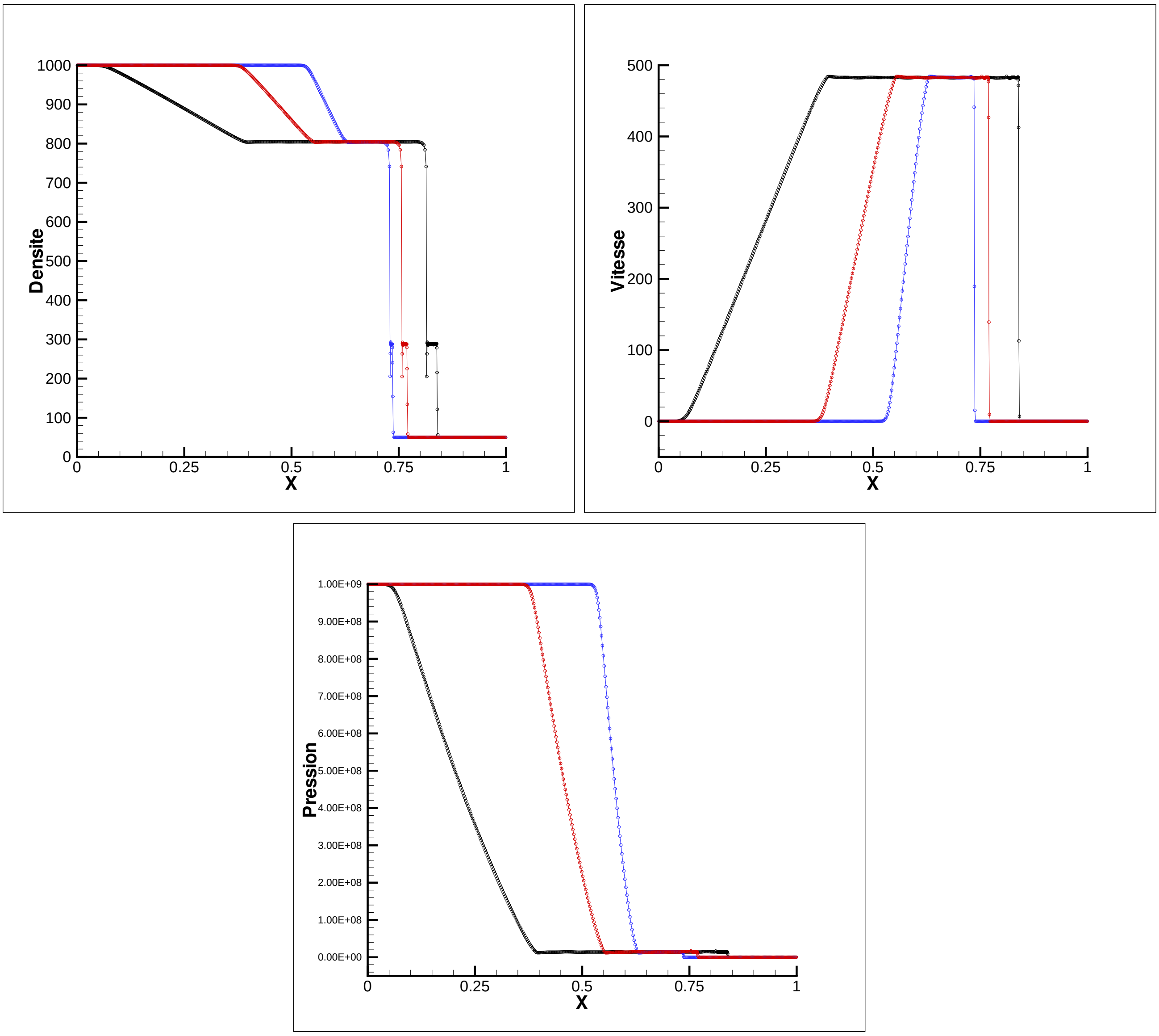


Figure 5.14: Tube à choc bimatériaux - Maillage uniforme à 500 mailles - Densité, Vitesse, Pression moyenne dans les mailles - $T_1 = 56.\ 10^{-6}$ (bleu), $T_2 = 118.\ 10^{-6}$ (rouge), et $T = 238.\ 10^{-6}$ (noir)

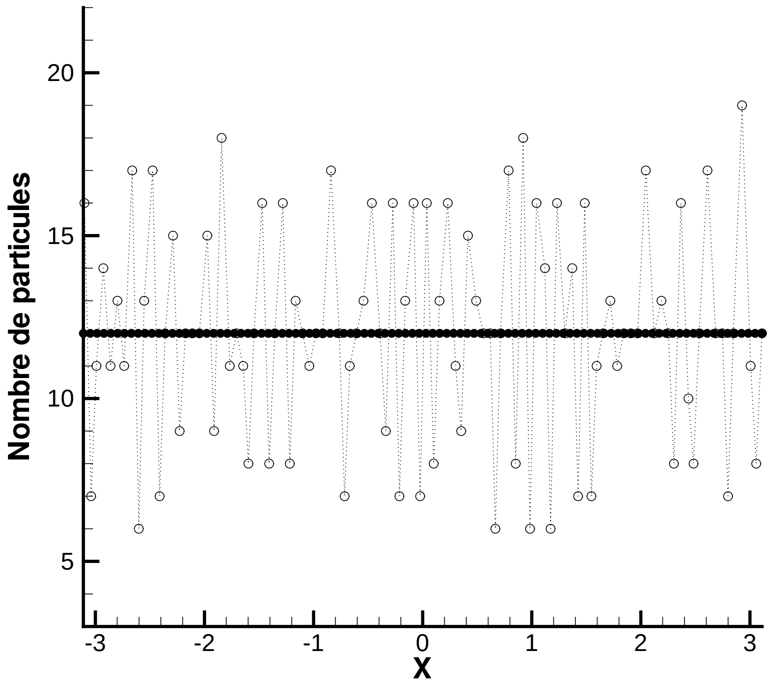


Figure 5.15: Nombre de particules par maille ($M_0 \rightarrow \bullet$ et $M_1 \rightarrow \circ$)

5.2.1 Fonction $F(X) = X^2$

Approchons la fonction $f(X) = X^2$ sur $\Omega = [-\pi, \pi]$. D'après les résultats théoriques le passage par les particules ne doit pas perturber la solution approchée qui est égale à la solution exacte en tout point. La courbe de la figure 5.15 donne le nombre de particules par maille dans M_0 ($\bullet$ trait plein) et M_1 ($\circ$ pointillés). On remarque que le nombre de particules dans les mailles de M_1 oscille entre 6 et 19 c'est-à-dire que le maillage M_1 est fortement perturbé par rapport au maillage M_0.
La figure 5.16 représente les résultats sur les particules ainsi que l'erreur commise sur les moments. Comme la fonction est continue sur tout le domaine ses moments exacts sont accessibles. La valeur des particules ($\circ$) colle à la solution exacte en trait plein, de plus on voit que l'erreur commise sur chacun des moments est de l'ordre du zéro machine comme cela était prévu par l'étude mathématique du problème. La méthode rend bien compte de la solution exacte bien que le maillage M_1 soit perturbé, ainsi que la distribution des particules dans les mailles de M_1. On n'observe pas de véritable phénomène de diffusion après le remaillage.
Ces conclusions seraient toujours vraies après un nombre quelconque de remaillage tant que l'on conserve au moins $n+1$ particules par maille si notre schéma calcule $n+1$ moments par maille.

5.2.2 Fonction $F(X) = -X^4 + 8X^2$

Approchons la fonction $f(X) = -X^4 + 8X^2$ sur $\Omega = [-\pi, \pi]$. Ce cas ne peut être traité exactement sans un nombre infini de particules, cependant nous montrons qu'avec la même configuration que précédemment (100

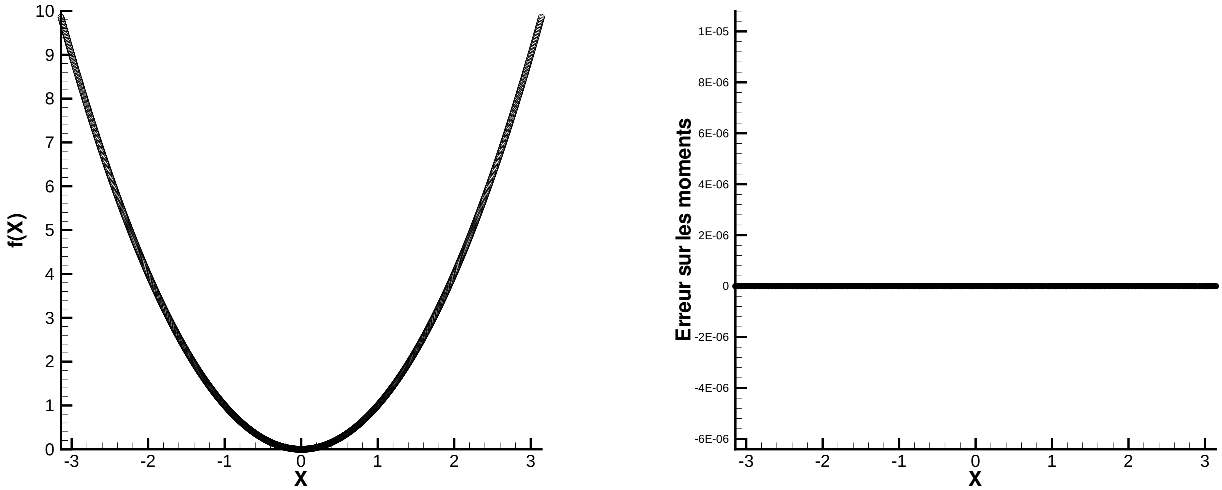


Figure 5.16: Test de remaillage pour $f(X) = X^2$ - Valeur des particules (gauche) et erreur sur les moments $M_{f,k} - M_{f,k}^{ex}$ (droite)

mailles, 12 particules par maille, M_1 est le même que pour le test **5.2.1**) la diffusion numérique due au remaillage est très limitée comme le montre la figure 5.17.

5.2.3 Fonction $F(X) = \sin(X)$

Le même test est effectué avec la fonction sinus et les résultats sont portés dans la figure 5.18. Pour cette fonction non polynômiale, on observe que l'erreur commise sur les moments est relativement faible. Précisons que cette erreur, tout comme pour les deux fonctions précédentes, pourrait être diminuée par une augmentation du nombre de particules dans les mailles.

5.2.4 Discussion

Ces trois tests montrent que cette technique de remaillage est performante. Elle est exacte pour tout polynôme de $\mathbb{P}_2$ et pour des polynômes d'ordre supérieur ou pour des fonctions non polynômiales, les erreurs commises sont acceptables et les particules sont toujours bien distribuées sur la fonction exacte. Bien que le nouveau maillage soit fortement perturbé par rapport au maillage initial (avec un maximum de $\pm 40\%$) et que les particules soient loin d'être uniformément réparties, la diffusion numérique est faible.
On pourrait imaginer d'ailleurs d'adapter la précision du remaillage en fonction du nombre de particule dans la maille après le remaillage. Si une maille possède N particules après le remaillage alors on adapte les poids pour intégrer exactement des polynômes de degré $[\frac{N-1}{2}]$ ($[\bullet]$ désigne la partie entière de $\bullet$). Comme cela on pourrait maximiser la précision dans chaque maille sans se soucier d'un nombre minimal de particules. Par exemple si une maille possède 1 particule, l'intégration ne sera exacte que pour des polynômes constant, et si une maille possède 11 particules alors l'intégration sera exacte pour des polynômes de degré au plus 5.
Cette technique est en plus indépendante du schéma numérique présenté. En ce sens elle pourrait s'adapter à tout schéma numérique qui aurait besoin d'une phase de remaillage. Le coût de la projection remaillage est

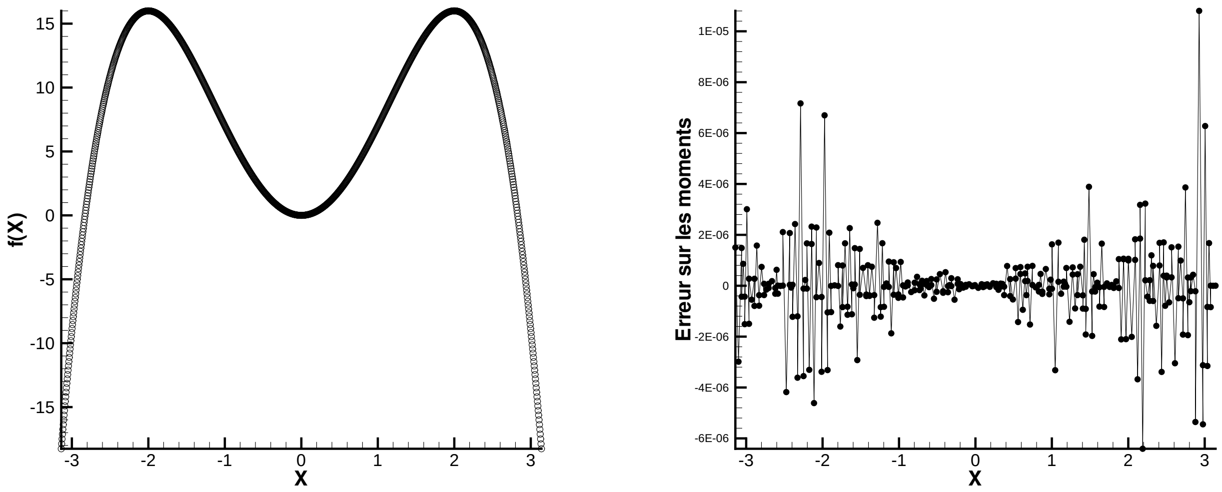


Figure 5.17: Test de remaillage pour $f(X) = -X^4 + 8X^2$ - Valeur des particules (gauche) et erreur sur les moments $M_{f,k} - M_{f,k}^{ex}$ (droite)

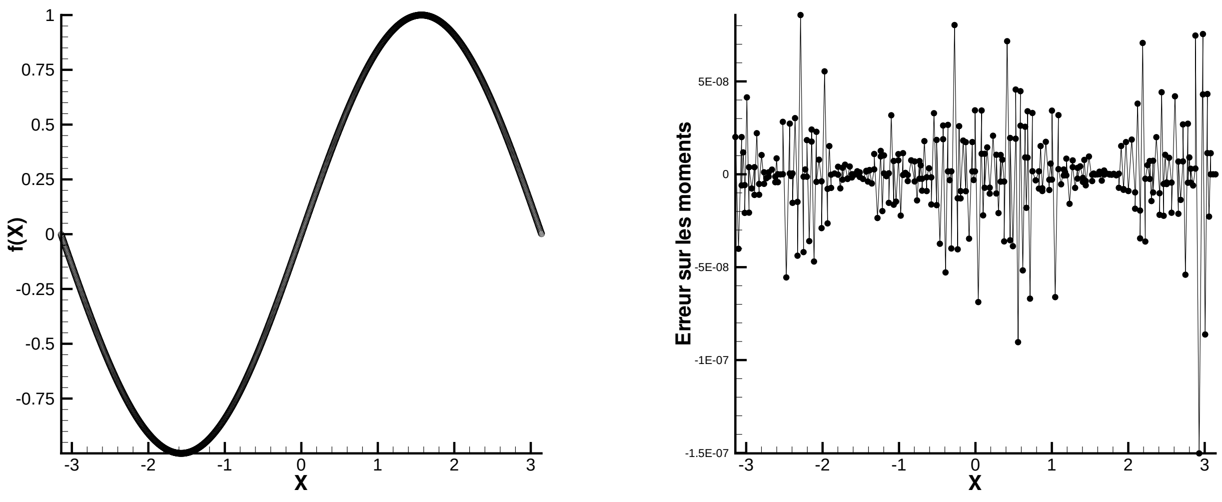


Figure 5.18: Test de remaillage pour $f(X) = \sin(X)$ - Valeur des particules (gauche) et erreur sur les moments $M_{f,k} - M_{f,k}^{ex}$ (droite)

raisonnable comparé à la précision de celui-ci. Comme notre méthode numérique n'en abuse pas la projection/remaillage devient un outil attractif. Remarquons pour finir que cette technique est indépendante de la dimension en espace : il n'est pas hasardeux de conjecturer que les mêmes résultats seront étendus dans les prochains chapitres traitant de la méthode numérique en deux dimensions d'espace.

Chapter 6

Méthode numérique en deux dimensions d'espace : un schéma Galerkin discontinu lagrangien pour maillages non structurés

Les principes de la méthode numérique en une dimension d'espace ont été présentés dans le **chapitre 4**. Dans ce chapitre nous développons la méthode pour deux dimensions d'espace pour des maillages non structurés de triangles, sachant que si la méthode se révèle utilisable dans cette configuration alors tous les autres types de configurations seront envisageables (par exemple en non-structuré/structuré, triangle/quadrangle ou non conforme).

Le même découpage en partie que dans le **chapitre 4** sera suivi. Après avoir fait les rappels nécessaires sur le système d'équations et précisé les notations, nous établirons les équations aux moments dans un triangle générique T. Nous développerons ensuite le schéma numérique explicite en temps, en calculant les termes incrémentaux et en précisant les processus de stabilisation, le calcul du pas de temps et l'obtention de schémas implicites. Dans une dernière partie nous présenterons l'extension des techniques de remaillage en 2D.

Reprenons le système d'équations de la dynamique des gaz en variables de Lagrange en 2D

$$\frac{\partial}{\partial t}(UJ) + \overrightarrow{\nabla}_\xi . \overrightarrow{\varphi}_\perp = 0, \tag{6.1}$$

avec

$$U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho e, 1)^t, \tag{6.2}$$

$$\overrightarrow{F}(U) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}, p \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right), \tag{6.3}$$

$$p = p(\rho, e), \tag{6.4}$$

$$\overrightarrow{\varphi}_\perp = F_1 \left(\overrightarrow{\nabla_\xi Y}\right)_\perp - F_2 \left(\overrightarrow{\nabla_\xi X}\right)_\perp, \tag{6.5}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} X - u = 0, \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Y - v = 0. \tag{6.7}$$

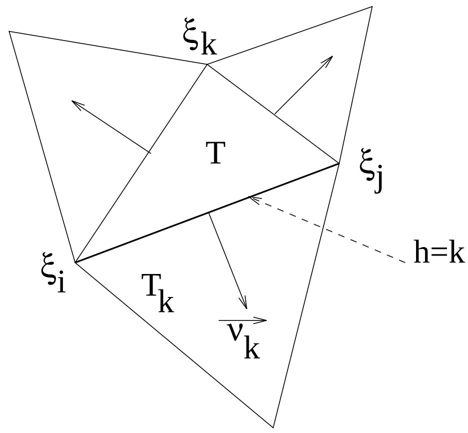


Figure 6.1: Maillage et notations

(6.6) et (6.7) peuvent être réécrites de manière équivalente en

$$\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\nabla_\xi X} - \overrightarrow{\nabla_\xi u} = 0, \tag{6.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\nabla_\xi Y} - \overrightarrow{\nabla_\xi v} = 0, \tag{6.9}$$

soit

$$\overrightarrow{\nabla_\xi X}(t) = \overrightarrow{\nabla_\xi X}(0) + \int_0^t \overrightarrow{\nabla_\xi u} dt, \tag{6.10}$$

$$\overrightarrow{\nabla_\xi Y}(t) = \overrightarrow{\nabla_\xi Y}(0) + \int_0^t \overrightarrow{\nabla_\xi v} dt. \tag{6.11}$$

Soit Ω un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^2$ muni d'un maillage triangulaire composé de $M+1$ cellules notées $T = T_c$ $(0 \leq c \leq M)$ telles que

$$\Omega = \bigcup_{c=0}^{M} T_c. \tag{6.12}$$

Le triangle générique T_c (noté encore T sans indice lorsqu'aucune confusion ne pourra être faite) est défini par ses trois sommets $\overrightarrow{\xi}_i$, $\overrightarrow{\xi}_j$, $\overrightarrow{\xi}_k$ avec $i < j < k$ les numéros de ces sommets dans la triangulation.
L'intérieur de T est noté $\overset{o}{T}$, le bord de T est quant à lui noté ∂T. Il est composé de trois arêtes, h_i, h_j, h_k, où h_i est l'arête faisant face au nœud $\overrightarrow{\xi}_i$. A chaque interface est associée sa longueur $L_.$ et sa normale unitaire sortante $\overrightarrow{\nu}_.$ (voir la figure 6.1). Souvent nous indicerons par 1 les entités faisant référence au nœud $\overrightarrow{\xi}_i$, par 2 celles correspondant à $\overrightarrow{\xi}_j$, et par 3 pour $\overrightarrow{\xi}_k$ afin de simplifier le propos et les écritures. Chaque triangle ayant une arête commune avec T est appelé triangle voisin ou triangle externe, il est indicé par h, soit T_h.

Il s'agit de résoudre le système d'équations de conservation sur chacun de ces triangles. Nous faisons l'hypothèse que les fonctions UJ et $\overrightarrow{\varphi}_\perp$ sont continues par maille. A l'intérieur du triangle la divergence de $\overrightarrow{\varphi}_\perp$ est considérée au sens usuel puisque $\overrightarrow{\varphi}_\perp$ est continue, par contre sur les arêtes la divergence de $\overrightarrow{\varphi}_\perp$ est définie au sens des distributions comme une ligne de masses de Dirac, soit

$$\overrightarrow{\nabla}_\xi . \overrightarrow{\varphi}_\perp|_h = [\overrightarrow{\varphi}_\perp|_{T_h} - \overrightarrow{\varphi}_\perp|_T] . \overrightarrow{\nu}_h \delta_h(\overrightarrow{\xi}), \tag{6.13}$$

avec δ_h la distribution de Dirac. Ainsi sur un triangle T on décompose la divergence en ($\{\bullet\}$ indique que l'entité $\bullet$ est considérée au sens des distributions)

$$\left\{\overrightarrow{\nabla}_\xi.\overrightarrow{\varphi}_\perp\right\} \equiv \left\{ \begin{array}{lll} \overrightarrow{\nabla}_\xi.\overrightarrow{\varphi}_\perp & \text{si} & \overrightarrow{\xi} \in \overset{o}{T} \\ \left[\overrightarrow{\varphi}_\perp|_{T_h} - \overrightarrow{\varphi}_\perp|_T\right].\overrightarrow{\nu}_h & \text{si} & \overrightarrow{\xi} \in h \end{array} \right. \tag{6.14}$$

Les mêmes concepts qu'en 1D sont réutilisés ; on ne résoud pas le système d'équations sur les variables physiques UJ mais sur les moments de celles-ci. La base de décomposition est $\{\sigma_k\}_{k=0}^{B_n-1}$, la base des polynômes de Bernstein de degré (n) dans T. Rappelons que B_n est le nombre de polynômes de Bernstein qui a été défini par (3.157).

L'intégration spatiale de la multiplication de (2.92) par un des polynômes de Bernstein donne formellement les équations aux moments sur Ω

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial t}(UJ) + \left\{\overrightarrow{\nabla}_\xi.\overrightarrow{\varphi}_\perp\right\}\right)\sigma_k d\xi d\eta = 0. \tag{6.15}$$

La décomposition en intégrales sur chaque triangle $T_c = T$ met en scène la divergence de $\overrightarrow{\varphi}_\perp$ sur $\overset{o}{T}$ et ses masses de Dirac sur le bord, soit

$$\sum_{c=1}^{M}\left\{\int_T \frac{\partial}{\partial t}(UJ)\sigma_k d\xi d\eta + \int_{\overset{o}{T}} \overrightarrow{\nabla}_\xi.\overrightarrow{\varphi}_\perp \sigma_k d\xi d\eta + \sum_{h\in\partial T}\int_h \left[\overrightarrow{\varphi}_\perp|_{T_h}.\overrightarrow{\nu}_h - \overrightarrow{\varphi}_\perp|_T.\overrightarrow{\nu}_h\right]\sigma_k d\mu\right\} = 0. \tag{6.16}$$

L'équation suivante n'est qu'une réécriture de (6.16) faisant apparaître le saut des moments de $\overrightarrow{\varphi}_\perp$ sur le bord.

$$\sum_{c=1}^{M}\left\{\int_T \frac{\partial}{\partial t}(UJ)\sigma_k d\xi d\eta + \int_{\overset{o}{T}} \overrightarrow{\nabla}_\xi.\overrightarrow{\varphi}_\perp \sigma_k d\xi d\eta + \sum_{h\in\partial T}\left[\int_h \overrightarrow{\varphi}_\perp|_{T_h}.\overrightarrow{\nu}_h \sigma_k d\mu - \int_h \overrightarrow{\varphi}_\perp|_T.\overrightarrow{\nu}_h \sigma_k d\mu\right]\right\} = 0. \tag{6.17}$$

6.1 Equations aux moments dans une maille T

La restriction des équations (6.17) au seul triangle T s'obtient après avoir réparti le saut des moments sur le bord entre T et T_h. Cette répartition, *a priori* arbitraire est réalisée à l'aide d'une valeur notée $\overline{\int_h \overrightarrow{\varphi}_\perp \sigma_k d\mu}^{*}$,

$$\left[\int_h \overrightarrow{\varphi}_\perp|_{T_h}\sigma_k d\mu - \int_h \overrightarrow{\varphi}_\perp|_T \sigma_k d\mu\right] = \underbrace{\left[\int_h \overrightarrow{\varphi}_\perp|_{T_h}\sigma_k d\mu - \overline{\int_h \overrightarrow{\varphi}_\perp \sigma_k d\mu}^{*}\right]}_{\text{contribution pour } T_h} + \underbrace{\left[\overline{\int_h \overrightarrow{\varphi}_\perp \sigma_k d\mu}^{*} - \int_h \overrightarrow{\varphi}_\perp|_T \sigma_k d\mu\right]}_{\text{contribution pour } T} \tag{6.18}$$

Quelque soit la valeur du moment $*$, la conservation sera respectée sur le domaine Ω car chacune des contributions sera affectée à « son triangle ».

En réalisant la même opération pour chacun des trois côtés h du triangle T, nous sommes en mesure d'écrire les équations aux moments dans T pour toute fonction de base où $k = 0, 1, \ldots, B_n - 1$

$$\int_T \frac{\partial}{\partial t}(UJ)\sigma_k d\xi d\eta + \int_{\overset{o}{T}} \overrightarrow{\nabla}_\xi.\overrightarrow{\varphi}_\perp \sigma_k d\xi d\eta + \sum_{h\in\partial T}\left[\overline{\int_h \overrightarrow{\varphi}_\perp.\overrightarrow{\nu}_h \sigma_k d\mu}^{*} - \int_h \overrightarrow{\varphi}_\perp|_T.\overrightarrow{\nu}_h \sigma_k d\mu\right] = 0. \tag{6.19}$$

Remarque. *Une intégration par parties du terme intérieur donne l'équation plus classique*

$$\int_T \frac{\partial}{\partial t}(UJ)\sigma_k d\xi d\eta - \int_{\overset{\circ}{T}} \overrightarrow{\varphi}_\perp . \overrightarrow{\nabla_\xi \sigma_k} d\xi d\eta + \sum_{h \in \partial T} \overline{\int_h \overrightarrow{\varphi}_\perp . \overrightarrow{\nu}_h \sigma_k d\mu}^{\,*} = 0. \tag{6.20}$$

Adoptons des notations plus concises

$$M_{UJ,k} := \int_T (UJ)\sigma_k d\xi d\eta \qquad \text{est le moment de } UJ,$$

$$M_{\nabla\varphi,k} := \int_{\overset{\circ}{T}} \overrightarrow{\nabla}_\xi . \overrightarrow{\varphi}_\perp \sigma_k d\xi d\eta \qquad \text{est le terme intérieur,}$$

$$\sum_{h \in \partial T} \left[\overset{*}{M}_{\varphi,k,h} - M_{\varphi,k,h} \right] := \sum_{h \in \partial T} \left[\overline{\int_h \overrightarrow{\varphi}_\perp . \overrightarrow{\nu}_h \sigma_k d\mu}^{\,*} - \int_h \overrightarrow{\varphi}_\perp |_T . \overrightarrow{\nu}_h \sigma_k d\mu \right] \qquad \text{sont les termes de bord,}$$

alors (6.19) devient

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{UJ,k} + M_{\nabla\varphi,k} + \sum_{h \in \partial T} \left[\overset{*}{M}_{\varphi,k,h} - M_{\varphi,k,h} \right] = 0. \tag{6.21}$$

Dans la partie suivante nous écrivons le schéma numérique dédié à la résolution de (6.21) en regardant la discrétisation temporelle, puis le calcul des termes intérieurs et des termes de bord.

6.2 Schéma numérique

6.2.1 Discrétisation temporelle explicite

Sur une maille temporelle $[t_n, t_{n+1}] \subset [0, T]$ avec $T > 0$ et $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ on approche

$$\frac{\partial}{\partial t}(M_{UJ,k}) \simeq \frac{M^{n+1}_{UJ,k} - M_{UJ,k}}{\Delta t}, \tag{6.22}$$

où l'exposant $.^{n+1}$ indique que la variable est considérée à $t = t_{n+1}$ et l'absence d'exposant indique que la variable est considérée à $t = t_n$.
Les termes incrémentaux sont évalués pour $t = t_n$ dans le cas explicite. La discrétisation temporelle explicite revêt la même forme qu'en 1D (voir **4.2.1**), c'est-à-dire (6.21) est approchée par

$$M^{n+1}_{UJ,k} = M_{UJ,k} - \Delta t M_{\nabla\varphi,k} - \Delta t \sum_{h \in \partial T} \left[\overset{*}{M}_{\varphi,k,h} - M_{\varphi,k,h} \right]. \tag{6.23}$$

Les termes incrémentaux sont calculés au temps t_n, c'est en ce sens que le schéma est appelé explicite. Dans une partie **6.2.7** nous développons des schémas dont la discrétisation temporelle n'est plus explicite.
Nous supposons que nos données sont les moments de toutes les variables à l'instant t_n, notre but est évidemment de calculer les moments de ces mêmes variables à l'instant suivant.

6.2.2 Termes intérieurs

Donnons l'approximation des termes intérieurs pour tout $k = 0, \cdots, B_n - 1$

$$M_{\nabla\varphi,k} = \int_{\overset{o}{T}} \overrightarrow{\nabla}_\xi . \overrightarrow{\varphi}_\perp \sigma_k d\xi d\eta, \tag{6.24}$$

$$\overrightarrow{\varphi}_\perp = F_1 \left(\overrightarrow{\nabla_\xi Y}\right)_\perp - F_2 \left(\overrightarrow{\nabla_\xi X}\right)_\perp . \tag{6.25}$$

Supposons que $\overrightarrow{\varphi}_\perp$ soit un vecteur dont les composantes sont polynômiales de degré (n), alors décomposé sur la base de Bernstein on trouve pour tout point $\overrightarrow{\xi} \in \overset{o}{T}$

$$\overrightarrow{\varphi}_\perp(\overrightarrow{\xi}) = \sum_{i=0}^{B_n-1} \overrightarrow{\varphi}_{\perp,i} \sigma_i(\overrightarrow{\xi}), \tag{6.26}$$

où $\overrightarrow{\varphi}_{\perp,i}$ est la composante i dans la décomposition sur la base de Bernstein.
Il serait alors simple de déterminer (6.24) puisque l'on n'aurait qu'à introduire (6.26) dans (6.24) pour obtenir

$$M_{\nabla\varphi,k} = \sum_{i=0}^{B_n-1} \overrightarrow{\varphi}_{\perp,i} . \int_{\overset{o}{T}} \overrightarrow{\nabla_\xi \sigma_i} \sigma_k d\xi d\eta, \tag{6.27}$$

et compte tenu de la forme des polynômes de Bernstein les intégrales précédentes ne poseraient pas de problèmes de calcul (voir annexes).

Pour déterminer (6.27), le problème consiste à trouver les composantes $\overrightarrow{\varphi}_{\perp,i}$, c'est-à-dire une approximation polynômiale de degré (n) du vecteur $\overrightarrow{\varphi}_\perp$. Comme nous connaissons les moments des variables à t_n, soit $(M_{UJ,.})$ nous avons accès aux polynômes (n)-diffusés,

$$\widehat{U}(\overrightarrow{\xi}) = \sum_{i=0}^{B_n-1} \widehat{U}_i \sigma_i(\overrightarrow{\xi}) \quad \text{avec} \quad \widehat{U}_i = \left(\frac{M_{UJ,i}}{M_{J,i}}\right). \tag{6.28}$$

Ainsi on approche

$$\overrightarrow{F}(U)(\overrightarrow{\xi}) \simeq \overrightarrow{F}(\widehat{U})(\overrightarrow{\xi}) = \sum_{i=0}^{B_n-1} \overrightarrow{\widehat{F}}_i \sigma_i(\overrightarrow{\xi}) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\widehat{F}}_i = \overrightarrow{F}(\widehat{U}_i). \tag{6.29}$$

En supposant que $\overrightarrow{\nabla_\xi X}$ et $\overrightarrow{\nabla_\xi Y}$ sont des polynômes que l'on décompose sur la base de Bernstein on détermine à l'instant t_n

$$\overrightarrow{\nabla_\xi X} \simeq \overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi X}}(\overrightarrow{\xi}) = \sum_{i=0}^{B_n-1} \overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi X}}_i \sigma_i(\overrightarrow{\xi}), \tag{6.30}$$

$$\overrightarrow{\nabla_\xi Y} \simeq \overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi Y}}(\overrightarrow{\xi}) = \sum_{i=0}^{B_n-1} \overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi Y}}_i \sigma_i(\overrightarrow{\xi}). \tag{6.31}$$

Nous utilisons la notation $\widehat{.}$ pour indiquer que les gradients de X et Y vont être déduits des valeurs des gradients de $\widehat{u}$ et $\widehat{v}$ dans les équations (6.10) et (6.11).
Enfin nous trouvons une approximation de $\overrightarrow{\varphi}_\perp$ sous la forme d'un polynôme de degré (n) tel que

$$\overrightarrow{\varphi}_\perp \simeq \sum_{i=0}^{B_n-1} \overrightarrow{\widehat{\varphi}}_{\perp,i} \sigma_i(\xi) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\widehat{\varphi}}_{\perp,i} = \left(\widehat{F}_{1,i} \left(\overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi Y}}\right)_{\perp,i} - \widehat{F}_{2,i} \left(\overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi X}}\right)_{\perp,i}\right). \tag{6.32}$$

Conformément au 1D, l'utilisation des polynômes (n)-diffusés se fait au détriment de la précision. Cependant le gain en terme de stabilité est important comme nous le verrons lors des essais numériques. Une alternative à l'utilisation de tels polynômes est de calculer les polynômes d'ordre (n) ayant les mêmes moments à l'instant t_n. Cependant un système linéaire est à résoudre par maille et il n'assure pas localement la positivité du jacobien et donc de la densité. Les polynômes (n)-diffusés assurent quant à eux que si tous les moments sont positifs (par exemple ceux de J : $(M_{J,\cdot})$) alors $\widehat{J}$ reste partout positif (voir le **chapitre 3**).

Les termes intérieurs sont alors approchés pour tout $k = 0, 1, \dots, B_n - 1$ par

$$M_{\nabla\varphi,k} \simeq \sum_{j=0}^{B_n-1} \overrightarrow{\widehat{\varphi}}_{\perp,j} \cdot \int_{\overset{\circ}{T}} \overrightarrow{\nabla_\xi \sigma_j} \sigma_k d\xi d\eta. \tag{6.33}$$

6.2.3 Termes de bord

Les termes de bord sont décomposés en deux moments

$$\sum_{h\in\partial T} \left[\overset{*}{M}_{\varphi,k,h} - M_{\varphi,k,h} \right] = \sum_{h\in\partial T} \left[\overset{*}{\overline{\int_h \overrightarrow{\varphi}_\perp . \overrightarrow{\nu}_h \sigma_k d\mu}} - \int_h \overrightarrow{\varphi}_\perp|_T . \overrightarrow{\nu}_h \sigma_k d\mu \right]. \tag{6.34}$$

Le moment de $\overrightarrow{\varphi}_\perp$ sur le bord h ne pose pas de problème puisqu'une approximation de $\overrightarrow{\varphi}_\perp$ vient d'être calculée en (6.32), ainsi on détermine

$$\int_h \overrightarrow{\varphi}_\perp|_T . \overrightarrow{\nu}_h \sigma_k d\mu \simeq \sum_{j=0}^{B_n-1} \overrightarrow{\widehat{\varphi}}_{\perp,j} . \overrightarrow{\nu}_h \int_h \sigma_i \sigma_k d\mu. \tag{6.35}$$

Le moment $*$, jusqu'alors arbitraire, est considéré comme la solution du problème de Riemann **aux moments** sur le bord h dans la direction $\overrightarrow{n}$, normale au côté eulérien. Les états physiques de part et d'autre de h sont les moments que l'on calculerait si nous étions en variables d'Euler. Le problème est que l'arête h, les normales $\overrightarrow{\nu}_h$, même si elles ont une forme agréable en coordonnées de Lagrange ont une forme très complexe en coordonnées d'Euler[1]. Il s'agit donc d'exprimer les moments sur le bord eulérien en coordonnées de Lagrange. Pour résoudre ce problème établissons un résultat préliminaire.

Relation entre transformations 2D et 1D. Soit T un triangle en variables de Lagrange et K l'image de T en variables d'Euler dans la transformation 2D dont le jacobien est J à un instant t,

$$T \xrightarrow{J} K \tag{6.36}$$
$$\overrightarrow{\xi} \longrightarrow \overrightarrow{X}(\overrightarrow{\xi}, t). \tag{6.37}$$

Une « arête » ∂K de K est l'image de l'arête ∂T dans une transformation 1D (à définir) dont le jacobien serait G (voir la figure 6.2)

$$\partial T \xrightarrow{G} \partial K \tag{6.38}$$
$$\mu \longrightarrow S(\mu, t). \tag{6.39}$$

On a alors le lemme suivant

[1]Par exemple le côté h peut ne plus être une droite si le champ de vitesse n'est pas linéaire.

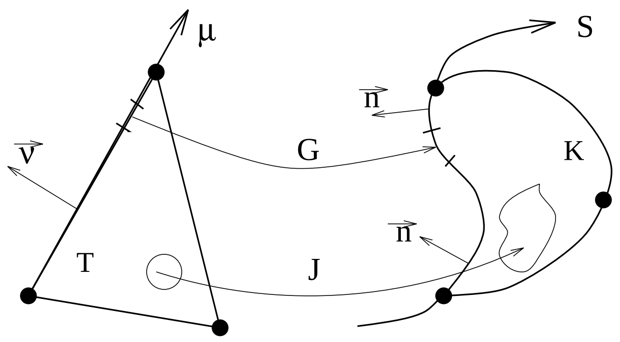


Figure 6.2: Changement de variable pour le bord 1D et pour une cellule 2D.

Lemme 8. *Soit A une fonction scalaire, alors*

$$\int_K \overrightarrow{\nabla_X A} dXdY = \int_{\partial T} A \begin{pmatrix} \left(\overrightarrow{\nabla_\xi Y}\right)_\perp . \overrightarrow{\nu}_{\partial T} \\ -\left(\overrightarrow{\nabla_\xi X}\right)_\perp . \overrightarrow{\nu}_{\partial T} \end{pmatrix} d\mu. \tag{6.40}$$

Démonstration. On note $\overrightarrow{n}_{\partial K}$ la normale unitaire sortante en tout point $S \in \partial K$, alors

$$\int_K \overrightarrow{\nabla_X A} dXdY \overset{Green}{=} \int_{\partial K} A \overrightarrow{n}_{\partial K} dS \tag{6.41}$$

$$\overset{trans.1D}{=} \int_{\partial T} A \overrightarrow{n}_{\partial K} G d\mu. \tag{6.42}$$

et

$$\int_K \overrightarrow{\nabla_X A} dXdY \overset{trans.2D}{=} \int_T \overrightarrow{\nabla_X A} J d\xi d\eta. \tag{6.43}$$

Or le second terme de l'équation précédente s'écrit ($\overrightarrow{\kappa}_{\partial T}$ est le troisième vecteur de base du trièdre de Frenet associé à ∂T : $(\overrightarrow{\nu}, \overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{\kappa})$)

$$\int_T (\partial_X A)\, J d\xi d\eta = \int_T J \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \partial_\xi A & \partial_\xi Y \\ \partial_\eta A & \partial_\eta Y \end{vmatrix} d\xi d\eta = \int_T \overrightarrow{rot_\xi} \left(A \overrightarrow{\nabla_\xi Y}\right) d\xi d\eta . \overrightarrow{\kappa}_{\partial T} = \int_{\partial T} A \left(\overrightarrow{\nabla_\xi Y}\right)_\perp . \overrightarrow{\nu}_{\partial T} d\mu$$

$$\int_T (\partial_Y A)\, J d\xi d\eta = \int_T J \frac{1}{J} \begin{vmatrix} \partial_\xi X & \partial_\xi A \\ \partial_\eta X & \partial_\eta A \end{vmatrix} d\xi d\eta = \int_T \overrightarrow{rot_\xi} \left(-A \overrightarrow{\nabla_\xi X}\right) d\xi d\eta . \overrightarrow{\kappa}_{\partial T} = \int_{\partial T} -A \left(\overrightarrow{\nabla_\xi X}\right)_\perp . \overrightarrow{\nu}_{\partial T} d\mu,$$

d'où le résultat annoncé

□

Le corollaire du lemme précédent peut se mettre sous la forme suivante pour tout point $\mu \in \partial T$ en utilisant (6.40) et (6.42)

$$G \overrightarrow{n}_{\partial K} = \begin{pmatrix} Gn_1 \\ Gn_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\overrightarrow{\nabla_\xi Y}\right)_\perp . \overrightarrow{\nu}_{\partial T} \\ -\left(\overrightarrow{\nabla_\xi X}\right)_\perp . \overrightarrow{\nu}_{\partial T} \end{pmatrix}. \tag{6.44}$$

Dans cette formulation un côté ∂K évolue de manière différente relativement à ses deux triangles T et T_{ext}. Cela implique qu'un recouvrement/décollement peut avoir lieu entre deux triangles initialement connexes. Pour palier cette ambiguïté, on choisit de définir le côté ∂K comme la position moyenne entre les deux positions eulériennes ∂K^T et $\partial K^{T_{ext}}$. Il suffit pour cela de se donner les moyennes arithmétiques des gradients de X et Y

$$\left(\overrightarrow{\nabla_\xi Y}\right)_\perp := \frac{1}{2}\left(\left(\overrightarrow{\nabla_\xi Y}\right)_\perp^T + \left(\overrightarrow{\nabla_\xi Y}\right)_\perp^{T_{ext}}\right), \tag{6.45}$$

$$\left(\overrightarrow{\nabla_\xi X}\right)_\perp := \frac{1}{2}\left(\left(\overrightarrow{\nabla_\xi X}\right)_\perp^T + \left(\overrightarrow{\nabla_\xi X}\right)_\perp^{T_{ext}}\right), \tag{6.46}$$

et d'approcher le côté exact par le côté ∂K déterminé à l'aide de (6.45) et (6.46).
On associe à ∂K sa normale unitaire sortante que l'on nomme $\overrightarrow{n}_{\partial K}$.

Moments des variables physiques sur les arêtes en coordonnées d'Euler. Revenons aux moments d'une fonction U sur le bord ∂K en variables d'Euler, on a

$$\int_{\partial K} U(S)\sigma_k(S)dS = \int_{\partial K} U(S)\sigma_k(S)\underbrace{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}_{=1}dS \tag{6.47}$$

$$\overset{trans.1D}{=} \int_{\partial T} U(\mu)\sigma_k(\mu)\sqrt{n_1^2+n_2^2}G(\mu)d\mu \tag{6.48}$$

$$= \int_{\partial T} U(\mu)\sigma_k(\mu)\sqrt{(Gn_1)^2+(Gn_2)^2}d\mu \tag{6.49}$$

$$\int_{\partial K} U(S)\sigma_k(S)dS \overset{(6.44)}{=} \int_{\partial T} U\sigma_k\sqrt{\left(\left(\overrightarrow{\nabla_\xi Y}\right)_\perp.\overrightarrow{\nu}_{\partial T}\right)^2 + \left(-\left(\overrightarrow{\nabla_\xi X}\right)_\perp.\overrightarrow{\nu}_{\partial T}\right)^2}d\mu. \tag{6.50}$$

Ainsi on exprime le moment de U en variables d'Euler comme le moment de UG en variables de Lagrange sur le bord lagrangien ∂T. Toutes les fonctions en jeu dans le terme de droite sont des fonctions des variables $\overrightarrow{\xi}$.
Il s'agit désormais d'approcher l'équation (6.50). Afin de conserver la cohérence avec ce qui a été fait pour calculer le terme intérieur, on choisit d'approcher le produit des fonctions UG par son polynôme (n)-diffusé : $\widehat{UG}$. A UG on substitue le polynôme $\widehat{UG}$ d'ordre (n) défini par

$$\widehat{UG}(\mu) := \sum_{i=0}^{B_n-1}\widehat{UG}_i\sigma_i(\mu) \quad \text{avec} \quad \widehat{UG}_i = \widehat{U}_i\sqrt{\left(\left(\widehat{\overrightarrow{\nabla_\xi Y}}\right)_{\perp,i}.\overrightarrow{\nu}_{\partial T}\right)^2 + \left(-\left(\widehat{\overrightarrow{\nabla_\xi X}}\right)_{\perp,i}.\overrightarrow{\nu}_{\partial T}\right)^2}, \tag{6.51}$$

où $\left(\widehat{\overrightarrow{\nabla_\xi X}}\right)_{\perp,i}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{\nabla_\xi Y}}\right)_{\perp,i}$ sont définis respectivement en utilisant (6.30) et (6.31).

Problème de Riemann aux moments. Les deux moments des états de part et d'autre de l'interface h sont donnés par

$$\widehat{\widehat{U_{h,k}^T}} := \frac{\sum_{i=0}^{B_n-1}\widehat{UG}_i\int_{h\in\partial T}\sigma_i\sigma_k d\mu}{\sum_{i=0}^{B_n-1}\widehat{G}_i\int_{h\in\partial T}\sigma_i\sigma_k d\mu} \quad \text{où} \quad UG, G \text{ sont définis dans } T, \tag{6.52}$$

$$\widehat{\widehat{U_{h,k}^{T_{ext}}}} := \frac{\sum_{i=0}^{B_n-1}\widehat{UG}_i\int_{h\in\partial T_{ext}}\sigma_i\sigma_k d\mu}{\sum_{i=0}^{B_n-1}\widehat{UG}_i\int_{h\in\partial T_{ext}}\sigma_i\sigma_k d\mu} \quad \text{où} \quad UG, G \text{ sont définis dans } T_{ext}. \tag{6.53}$$

A l'aide de ces moments, nous sommes en mesure de déterminer deux états de part et d'autre de h. Plus précisement on définit une densité, une pression, une vitesse du son, faisant référence au côté h pour chaque fonction de base σ_k ainsi qu'une vitesse projetée sur la normale $\overrightarrow{n}_{\partial K}$.
Le problème de Riemann défini par ces deux moments est résolu avec le solveur acoustique monodimensionnel.

Ce solveur, décrit dans le chapitre présentant la méthode en 1D, nous donne une valeur du moment de la pression $\overset{*}{p}_{h,k}$ et de la vitesse normale $\overset{*}{\nu}_{h,k} = \overrightarrow{\overset{*}{V}_{h,k}}.\overrightarrow{n}_{\partial K}$.

$$RP(\widehat{\widehat{U^T_{h,k}}}, \widehat{\widehat{U^{T_{ext}}_{h,k}}}, \overrightarrow{n}_{\partial K}) \begin{array}{l} \nearrow \quad \overset{*}{p}_{h,k} \\ \searrow \quad \overset{*}{\nu}_{h,k} \end{array} . \tag{6.54}$$

Il s'avère que sur un côté h il nous faut résoudre autant de problèmes de Riemann monodimensionnels qu'il y a de fonctions de base non identiquement nulles sur h. Par exemple si nous nous plaçons dans le cas $(n) = 2$, soit des paraboloïdes par mailles, alors par côté nous résolverons 3 problèmes de Riemann ; un problème pour chaque fonction de base.
Les accroissements sont déduits à l'aide de

$$\begin{aligned} U = 1 \quad &: \quad \overset{*}{M}_{\varphi,k,h} = \overset{*}{\nu}_{h,k} \int_{h\in\partial T} \widehat{G}\sigma_k d\mu, &(6.55)\\ U = \rho u \quad &: \quad \overset{*}{M}_{\varphi,k,h} = \overset{*}{p}_{h,k} \int_{h\in\partial T} \overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi Y}}_\perp.\overrightarrow{\nu}_h\sigma_k d\mu, &(6.56)\\ U = \rho v \quad &: \quad \overset{*}{M}_{\varphi,k,h} = \overset{*}{p}_{h,k} \int_{h\in\partial T} -\overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi X}}_\perp.\overrightarrow{\nu}_h\sigma_k d\mu, &(6.57)\\ U = \rho e \quad &: \quad \overset{*}{M}_{\varphi,k,h} = \overset{*}{p}_{h,k}\overset{*}{\nu}_{h,k} \int_{h\in\partial T} \widehat{G}\sigma_k d\mu. &(6.58) \end{aligned}$$

Les termes de bord sont alors approchés par

$$\begin{aligned} M_{\varphi,k,h} &= \sum_{j=0}^{B_n} \overrightarrow{\widehat{\varphi}}_{\perp,j}.\overrightarrow{\nu}_h \int_{h\in\partial T} \sigma_j\sigma_k d\mu &(6.59)\\ \overset{*}{M}_{\varphi,k,h} &= \overset{*}{\Phi}_{h,k} \int_{h\in\partial T} \sigma_k d\mu &(6.60) \end{aligned}$$

où $\overset{*}{\Phi}_{h,k} \int_{h\in\partial T} \sigma_k d\mu$ désigne successivement les seconds membres de (6.55-6.58). Ainsi

$$\sum_{h\in\partial T} \left[\overset{*}{M}_{\varphi,k,h} - M_{\varphi,k,h}\right] = \sum_{h\in\partial T} \left[\overset{*}{\Phi}_{h,k} \int_{h\in\partial T} \sigma_k d\mu + \sum_{j=0}^{B_n-1} \overrightarrow{\widehat{\varphi}}_{\perp,j}.\overrightarrow{\nu}_h \int_{h\in\partial T} \sigma_j\sigma_k d\mu\right]. \tag{6.61}$$

6.2.4 Fin du cycle de calcul

A l'aide de l'approximation des termes incrémentaux (termes intérieurs et termes de bord), les moments de UJ à l'instant t_{n+1} sont connus et l'équation (6.23) s'écrit alors

$$M^{n+1}_{UJ,k} = M_{UJ,k} - \Delta t \sum_{j=0}^{B_n-1} \overrightarrow{\widehat{\varphi}}_{\perp,j}. \int_{\overset{o}{T}} \overrightarrow{\nabla_\xi\sigma_j}\sigma_k d\xi d\eta - \Delta t \sum_{h\in\partial T} \left[\overset{*}{\Phi}_{h,k} \int_{h\in\partial T} \sigma_k d\mu + \sum_{j=0}^{B_n-1} \overrightarrow{\widehat{\varphi}}_{\perp,j}.\overrightarrow{\nu}_h \int_{h\in\partial T} \sigma_j\sigma_k d\mu\right]. \tag{6.62}$$

Il faut maintenant incrémenter les moments des gradients de X et Y en calculant les moments des gradients de la vitesse au temps t_n. Comme nous avons supposé que $\overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi X}} \in \mathbb{P}_n(T)$, on décompose ces polynômes sur la base de Bernstein et pour chaque composante $j = 0, \ldots, B_n - 1$ on résoud

$$M^{n+1}_{\overrightarrow{\nabla_\xi X},j} = M_{\overrightarrow{\nabla_\xi X},j} + \Delta t \int_T \overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi u}} \sigma_j d\xi d\eta, \quad (6.63)$$

$$M^{n+1}_{\overrightarrow{\nabla_\xi Y},j} = M_{\overrightarrow{\nabla_\xi Y},j} + \Delta t \int_T \overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi v}} \sigma_j d\xi d\eta, \quad (6.64)$$

soit

$$M^{n+1}_{\overrightarrow{\nabla_\xi X},j} = M_{\overrightarrow{\nabla_\xi X},j} + \Delta t \sum_{k=0}^{B_n-1} \widehat{u}_k \int_T \overrightarrow{\nabla_\xi \sigma_k} \sigma_j d\xi d\eta, \quad (6.65)$$

$$M^{n+1}_{\overrightarrow{\nabla_\xi Y},j} = M_{\overrightarrow{\nabla_\xi Y},j} + \Delta t \sum_{k=0}^{B_n-1} \widehat{v}_k \int_T \overrightarrow{\nabla_\xi \sigma_k} \sigma_j d\xi d\eta. \quad (6.66)$$

Ainsi les gradients de X et Y sont incrémentés par les équations suivantes (les intégrales sur T sont calculables analytiquement, voir les annexes)

$$\overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi X}}^{n+1}_j = \overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi X}}_j + \Delta t \sum_{k=0}^{B_n-1} \widehat{u}_k \frac{\int_T \overrightarrow{\nabla_\xi \sigma_k} \sigma_j d\xi d\eta}{\int_T \sigma_j d\xi d\eta}, \quad (6.67)$$

$$\overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi Y}}^{n+1}_j = \overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi Y}}_j + \Delta t \sum_{k=0}^{B_n-1} \widehat{v}_k \frac{\int_T \overrightarrow{\nabla_\xi \sigma_k} \sigma_j d\xi d\eta}{\int_T \sigma_j d\xi d\eta}. \quad (6.68)$$

Ainsi nous sommes capables de donner les moments des variables physiques à l'instant t_{n+1} en fonction des moments à l'instant t_n. La méthode numérique explicite est alors complète du point de vue du calcul des variables physiques (voir **6.2.8** pour un résumé).
Cependant des problèmes de stabilité risquent encore d'apparaître en présence de fortes ondes de chocs par exemple ou encore si le degré des polynômes de base est supérieur à 1. Il est donc nécessaire de prévoir un processus permettant de limiter les instabilités numériques et le pas de temps.

6.2.5 Condition de stabilité sur le pas de temps Δt

Les deux conditions de stabilité (positivité et CFL) s'étendent en 2D. La condition CFL est un peu modifiée pour prendre en compte l'aspect bidimensionnel. On désire dans cette condition qu'une onde acoustique ne traverse pas la moitié du triangle dans lequel elle se propage, soit

$$(\Delta t)_{T_c} \leq \frac{1}{2} \min_{h=1,2,3} (L_h) \min_{k=0,\ldots,B_n-1} \left(\frac{M_{J,k}}{\widehat{c}_k} \right) \quad (6.69)$$

$$\Delta t_{CFL} = \min_{c=0,\ldots,M} (\Delta t)_{T_c} \quad (6.70)$$

où pour tout $k = 0, \ldots, B_n - 1$ on définit

$$\widehat{c}_k = \sqrt{\gamma \frac{\widehat{p}_k}{\widehat{\rho}_k}}. \quad (6.71)$$

La condition de positivité est quant à elle identique à celle développée pour la méthode 1D.

6.2.6 Stabilisation

Notre limiteur 2D est superposable au limiteur 1D. La philosophie de ce limiteur peut être résumée en :
« Si la compression est maximale durant le cycle dans le triangle courant (par rapport à ces trois voisins) alors

on limite toutes les variables UJ en les remplaçant par leur polynôme (n)-diffusé. »
Ce limiteur est conservatif et permet de ne limiter que les zones de compression et laisser les zones de dilatation exemptes de diffusion numérique trop importante.
Une étude plus poussée devrait permettre d'améliorer sensiblement les performances d'un tel limiteur. Cependant le rapport qualité/prix nous semble suffisant en l'état.

6.2.7 Discrétisation temporelle : méthode de Runge-Kutta

Comme en 1D on construit la discrétisation temporelle des schémas à l'aide d'une méthode de Runge Kutta. Il s'agit d'itérer le schéma numérique pendant un certain nombre de pas en temps. Une moyenne de ces itérés permet ensuite d'atteindre la précision temporelle désirée. Nous nous sommes restreins à deux pas, soit un schéma prédicteur-correcteur, bien que rigoureusement il aurait fallu adapter la précision temporelle à la précision spatiale. Le surcoût d'une telle adaptation ne semble pas nécessaire au regard des résultats numériques (voir le chapitre **7**).

6.2.8 Algorithme résumé

La méthode explicite en deux dimensions d'espace peut se résumer à l'algorithme suivant.

Données Initiales
Moments de UJ, gradients de X et Y à t_n
$(M_{UJ,.})$, $\overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi X}}$, $\overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi Y}}$

Début du cycle de calcul

Termes Intérieurs : $M_{\nabla\varphi,.}$ **(6.24)**
Pour tout triangle T, toute fonction de base σ_k
1- Calcul des composantes $\overrightarrow{\widehat{\varphi}}_{\perp,i}$ définies par (6.32) en utilisant (6.28-6.31)
2- Calcul des intégrales dans (6.27)
3- Somme sur les composantes $\overrightarrow{\widehat{\varphi}}_{\perp,i}$ et les intégrales calculées en 2
$\Longrightarrow$ accès aux composantes $M_{\nabla\varphi,k}$ définies par (6.27)

Termes de Bord : $\sum_{h\in\partial T}\left[\overset{*}{M}_{\varphi,k,h} - M_{\varphi,k,h}\right]$ **(6.35)**
Pour tout triangle T, tout côté h, toute fonction de base σ_k
1- Calcul du terme $M_{\varphi,k,h}$ à l'aide de (6.59) et (6.32)
2- Détermination des composantes de $\widehat{G}$ avec (6.51)
3- Détermination des états autour de h (6.52) et (6.53)
4- Solveur de Riemann monodimensionnel dans la direction normale à h (6.54)
5- Calcul de $\overset{*}{M}_{\varphi,k,h}$ avec (6.60)
$\Longrightarrow$ accès aux composantes $\sum_{h\in\partial T}\left[\overset{*}{M}_{\varphi,k,h} - M_{\varphi,k,h}\right]$ avec (6.61)

Calcul du pas de temps Δt
Vérification du critère de positivité et du critère CFL

Incrémentation des moments des variables physiques
Pour tout triangle T, toute fonction de base σ_k
$\Longrightarrow$ accès aux composantes $M^{n+1}_{UJ,k}$ à l'aide de (6.62)

Incrémentation des variables géométriques
Pour tout triangle T, toute fonction de base σ_k
$\Longrightarrow$ accès aux composantes $\overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi X}}{}^{n+1}_k$ et $\overrightarrow{\widehat{\nabla_\xi Y}}{}^{n+1}_k$ à l'aide de (6.67) et (6.68)

Fin du cycle de calcul

Si un critère de limitation est vérifié dans T alors
Processus de limitation des variables physiques (voir 6.2.6)
Fin Si

Si un critère de remaillage est vérifié dans le domaine alors
Processus de remaillage par les particules (voir 6.3)
Fin Si

6.3 Remaillage par une méthode de type particulaire

Le remaillage prend tout son intérêt en multidimension car certaines situations ne peuvent être traitées qu'en ayant recours à des remaillages.
Les concepts exposés en 1D (voir **4.3**) sont parfaitement étendus au 2D. Cela se comprend aisément puisque les résultats sur les techniques de projection/remaillage ont été obtenus en utilisant exclusivement les coordonnées barycentriques des particules et des fonctions de base de Bernstein. Comme la notion de coordonnées barycentriques s'étend à toute dimension d'espace, on peut affirmer sans crainte que les résultats établis en 1D ont leur équivalent en multidimension.

6.3.1 Projection de l'information sur une population de particules

Donnons dans un premier temps une définition de ce que l'on entend par particule pour deux dimensions d'espace

Définition 11. *On appelle particule, une masse de Dirac $\delta_{\overrightarrow{\xi}_p}(\overrightarrow{\xi})$ positionnée en $\overrightarrow{\xi}_p$ portant 6 poids ;*

$$(\omega U)_p = (\omega\rho, \omega\rho u, \omega\rho v, \omega\rho e, \omega)_p \qquad U_p = \frac{(\omega U)_p}{\omega_p}.$$

On dira qu'une particule p appartient à une maille T si $\overrightarrow{\xi}_p \in T$. Il est alors simple de définir les moments discrets par rapport aux bases de Bernstein

Définition 12. *On appelle moments discrets d'ordre (n) dans Bernstein les (B_n)-vecteurs (vecteur de taille B_n)*

$$(M_{\omega,.}) \equiv \begin{pmatrix} M_{\omega U,0} \\ M_{\omega U,1} \\ \vdots \\ M_{\omega U,B_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{p\in I_{i+1/2}} \omega_p U_p \sigma_0^{(n)}(\xi_p) \\ \sum_{p\in I_{i+1/2}} \omega_p U_p \sigma_1^{(n)}(\xi_p) \\ \vdots \\ \sum_{p\in I_{i+1/2}} \omega_p U_p \sigma_{B_n}^{(n)}(\xi_p) \end{pmatrix}$$

Rappel : en 2D on a $B_0 = 1$, $B_1 = 3$, $B_2 = 6$, $B_3 = 15$,... Appelons N le nombre de particule(s) dans la maille courante T. Dans le cas dans le cas $N < B_n$ il n'existe *a priori* aucun polynôme passant par ces N points. Pour $N = B_n$ il existe un et un seul polynôme de degré (n) passant par ces B_n points,et dans le cas $N > B_n$ il existe une infinité de polynômes : c'est dans ces deux derniers cas que nous nous plaçons et que nous allons faire une hypothèse sur la distribution des masses de Dirac pour obtenir l'unicité de la population. On a alors le **lemme 5** étendu au 2D

Lemme 9. *Soient $N \geq B_n$ positions distinctes dans T notées $\overrightarrow{\xi}_p$, $p = 1, \ldots, N$. Soient $(M_{UJ,.})$ les moments d'ordre (n) par rapport à la base Bernstein donnés par le schéma numérique. Si les poids $(\omega U)_p$ associés à la position $\overrightarrow{\xi}_p$ sont distribués sur un polynôme d'ordre (n) alors il existe une unique population de N particules telles que pour tout $k = 0, 1, \ldots, B_n - 1$*

$$M_{\omega U,k} = M_{UJ,k} \tag{6.72}$$

Démonstration. Considérons les polynômes

$$\widetilde{(\omega U)}(\overrightarrow{\xi}) \quad = \quad \sum_{j=0}^{B_n-1} \widetilde{(\omega U)}_j \sigma_j(\overrightarrow{\xi}),$$

tels que pour toute particule p

$$(\omega U)_p \quad = \quad \widetilde{(\omega U)}(\overrightarrow{\xi}_p).$$

Alors les moments de particules dont donnés par

$$M_{\omega U,k} \quad = \quad \sum_{p\in T} \widetilde{(\omega U)}(\overrightarrow{\xi}_p)\sigma_k(\overrightarrow{\xi}_p) = \sum_{j=0}^{B_n-1} \widetilde{(\omega U)}_j \sum_{p\in T} \sigma_j(\overrightarrow{\xi}_p)\sigma_k(\overrightarrow{\xi}_p).$$

Matriciellement on obtient par rapport à la base de Bernstein

$$\begin{aligned}
(M_{\omega U,.}) \quad &= \quad \left(\sum_{p=1}^{N} \sigma_i(\overrightarrow{\xi}_p)\sigma_j(\overrightarrow{\xi}_p)\right)_{i,j=0,\ldots,B_n-1} \left(\widetilde{\omega U}_.\right) \\
&= \quad B\left(\widetilde{\omega U}_.\right) && (6.73) \\
(M_{\omega U,.}) \quad &\stackrel{\text{déf.}}{=} \quad (M_{UJ,.}), && (6.74)
\end{aligned}$$

ce qui revient à pouvoir résoudre le système linéaire

$$B\left(\widetilde{\omega U}_.\right) = (M_{UJ,.}). \tag{6.75}$$

La population de particules sera totalement définie si et seulement si la matrice B est inversible.

Lemme 10. *La matrice B est définie positive et symétrique. De plus B est inversible si et seulement si B_n particules ont une position distincte ($\overrightarrow{\xi}_i \neq \overrightarrow{\xi}_j$ pour au moins B_n indices $i \neq j$).*

Démonstration. (Lemme 10). La positivité et la symétrie sont évidentes. L'inversibilité s'obtient en considérant les vecteurs de $\mathbb{R}^N$

$$R_0 = \left(\sigma_0(\overrightarrow{\xi}_1), \sigma_0(\overrightarrow{\xi}_2), \ldots, \sigma_0(\overrightarrow{\xi}_N)\right)^t \tag{6.76}$$

$$R_1 = \left(\sigma_1(\overrightarrow{\xi}_1), \sigma_1(\overrightarrow{\xi}_2), \ldots, \sigma_1(\overrightarrow{\xi}_N)\right)^t \tag{6.77}$$

$$\vdots \tag{6.78}$$

$$R_{B_n-1} = \left(\sigma_{B_n-1}(\overrightarrow{\xi}_1), \sigma_{B_n-1}(\overrightarrow{\xi}_2), \ldots, \sigma_{B_n-1}(\overrightarrow{\xi}_N)\right)^t. \tag{6.79}$$

$$\tag{6.80}$$

Par définition chaque élément de la matrice B vaut ($(.,.)$ dénote le produit scalaire)

$$b_{ij} = (R_i, R_j), \tag{6.81}$$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} (R_0, R_0) & (R_0, R_1) & \cdots & (R_0, R_{B_n-1}) \\ (R_1, R_0) & (R_1, R_1) & \cdots & (R_1, R_{B_n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (R_{B_n-1}, R_0) & (R_{B_n-1}, R_1) & \cdots & (R_{B_n-1}, R_{B_n-1}) \end{pmatrix}. \tag{6.82}$$

B sera donc inversible si et seulement si $\{R_0, \cdots, R_{B_n-1}\}$ est une base de $\mathbb{R}^{B_n}$.
Montrons que $\{R_0, \cdots, R_{B_n-1}\}$ est une base. Soit $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{B_n-1})^t \in \mathbb{R}^{B_n}$ alors

$$\alpha_0 R_0 + \ldots + \alpha_{B_n-1} R_{B_n-1} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_0(\overrightarrow{\xi}_1) & \sigma_1(\overrightarrow{\xi}_1) & \cdots & \sigma_{B_n-1}(\overrightarrow{\xi}_1) \\ \sigma_0(\overrightarrow{\xi}_2) & \sigma_1(\overrightarrow{\xi}_2) & \cdots & \sigma_{B_n-1}(\overrightarrow{\xi}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_0(\overrightarrow{\xi}_N) & \sigma_1(\overrightarrow{\xi}_N) & \cdots & \sigma_{B_n-1}(\overrightarrow{\xi}_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{B_n-1} \end{pmatrix} = 0, \tag{6.83}$$

appellons K la matrice précédente. Le résultat sera prouvé si K est inversible ce qui est vrai car les lignes de K forment une base de $\mathbb{R}^{B_n}$. Les lignes de K forment une base de $\mathbb{R}^{B_n}$ car $\{\sigma_.\}$ est une base de polynômes et $\overrightarrow{\xi}_i \neq \overrightarrow{\xi}_j$ pour au moins B_n indices $i \neq j$. Donc $\{R_0, \cdots, R_{B_n-1}\}$ est une base de $\mathbb{R}^{B_n}$, la matrice B est donc inversible.
(retour à la démonstration de 9) Ainsi la population de particules est totalement définie si et seulement si $\overrightarrow{\xi}_i \neq \overrightarrow{\xi}_j$ pour au moind B_n indices $i \neq j$, ce qui est équivalent à : les positions $\left\{\overrightarrow{\xi}_p\right\}_{p=1,\ldots,N}$ définissent au moins B_n positions distinctes dans T, ce qui termine la preuve.

□

Comme en 1D nous arrivons à la conclusion suivante : en supposant les poids des N particules distribués sur un polynôme de degré (n), il existe une unique population de particules ayant ses moments discrets d'ordre (n) dans Bernstein égaux aux moments d'ordre (n) donnés par le schéma numérique. Cette procédure (moments $\rightarrow$ particules $\rightarrow$ moments) est évidemment exacte pour des polynômes d'ordre inférieur ou égal à (n) si l'on ne change pas de maillage.
Par contre un changement de maillage brise l'exactitude de cette intégration numérique. Cependant avec les mêmes outils qu'en 1D nous allons pouvoir définir un processus de remaillage plus précis.

6.3.2 Remaillage et projection sur le nouveau maillage

En suivant les mêmes principes que pour le 1D nous allons construire un procédé nous assurant une intégration numérique exacte d'une fonction polynômiale sur Ω même après un nombre quelconque de remaillage du domaine. Appelons M le maillage initial dont la maille courante est T. Le nouveau maillage est noté $\mathcal{M}$ et la maille courante est appelée τ. Supposons que la fonction (UJ) soit polynômiale sur le domaine Ω et qu'il cœxiste N particules dans la maille T. Nous savons que si nous plaçons les N particules aux points de Gauss $\overrightarrow{\xi}_p$ avec des poids w_p) alors l'intégration numérique

$$M_{UJ,k} := \int_T (UJ)(\overrightarrow{\xi})\sigma_k(\overrightarrow{\xi})d\xi d\eta = \sum_{p=1}^{N} w_p (UJ)(\overrightarrow{\xi}_p)\sigma_k(\overrightarrow{\xi}_p) \tag{6.84}$$

est exacte si $N \geq B_n$ dans M.
Changeons de maillage. Les positions des particules ainsi que leurs poids $(UJ)(\overrightarrow{\xi}_p)$ sont fixes. Les définitions des polynômes de Bernstein ont changé puisque les mailles sont différentes. Les particules dans τ sont des particules qui étaient positionnées *a priori* dans plusieurs anciennes mailles T. Supposons qu'il cœxiste $\mathcal{N}$ particules dans la maille τ. Nous voulons toujours intégrer exactement

$$\mathcal{M}_{UJ,k} := \int_\tau (UJ)(\overrightarrow{\xi})\sigma_k(\overrightarrow{\xi})d\xi d\eta \equiv \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{W}_q (UJ)(\overrightarrow{\xi}_q)\sigma_k(\overrightarrow{\xi}_q). \tag{6.85}$$

Existe-t-il des poids $\mathcal{W}_q$ tels que (6.85) soit vraie pour tout polynôme (UJ) ?

Lemme 11. *Le problème d'intégration numérique (6.85) dans τ pour tout $k = 0, 1, \ldots, B_n - 1$ et pour tout polynôme $(UJ) \in \mathbb{P}_n(\Omega)$ possède une unique solution sous les hypothèses*

$$\begin{aligned} &(i) \quad \mathcal{N} \geq B_{n+1} \\ &(ii) \quad \forall q = 1, 2, \ldots \mathcal{N} \quad \mathcal{W}_q = \widetilde{\mathcal{W}}(\overrightarrow{\xi}_q), \ \textit{avec}\ \widetilde{\mathcal{W}} \in \mathbb{P}_{2n}(\tau). \end{aligned}$$

Démonstration. Décomposons (UJ) sur Bernstein dans la nouvelle maille τ (c'est valide puisque $(UJ) \in \mathbb{P}_n(\Omega)$)

$$(UJ)(\overrightarrow{\xi}) = \sum_{j=0}^{B_n-1} (UJ)_j \sigma_j(\overrightarrow{\xi}), \tag{6.86}$$

Les polynômes $\{\sigma_j\}_{j=0}^{B_n-1}$ sont les polynômes de Bernstein d'ordre (n) définis dans τ. On introduit (6.86) dans (6.85) et

$$\begin{aligned}
\int_\tau (UJ)(\overrightarrow{\xi})\sigma_k(\overrightarrow{\xi})d\xi d\eta &= \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{W}_q (UJ)_q \sigma_k(\overrightarrow{\xi}_q) &(6.87)\\
\int_\tau \left(\sum_{j=0}^{B_n-1} (UJ)_j \sigma_j(\overrightarrow{\xi})\right)\sigma_k(\overrightarrow{\xi})d\xi d\eta &= \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{W}_q \left(\sum_{j=0}^{B_n-1} (UJ)_j \sigma_j(\overrightarrow{\xi}_q)\right)\sigma_k(\overrightarrow{\xi}_q) &(6.88)\\
\sum_{j=0}^{B_n-1} (UJ)_j \int_\tau \sigma_j(\overrightarrow{\xi})\sigma_k(\overrightarrow{\xi})d\xi d\eta &= \sum_{j=0}^{B_n-1} (UJ)_j \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{W}_q \sigma_j(\overrightarrow{\xi}_q)\sigma_k(\overrightarrow{\xi}_q), &(6.89)
\end{aligned}$$

ce système sera vérifié si pour tout j, k on a

$$\int_\tau \sigma_j(\overrightarrow{\xi})\sigma_k(\overrightarrow{\xi})d\xi d\eta = \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{W}_q \sigma_j(\overrightarrow{\xi}_q)\sigma_k(\overrightarrow{\xi}_q), \tag{6.90}$$

la définition des polynômes de Bernstein nous permet de remplacer $\sigma_j(\overrightarrow{\xi})\sigma_k(\overrightarrow{\xi})$ par $\sigma_{j+k}^{(2n)}(\overrightarrow{\xi})$ à une constante près et (6.90) devient

$$\begin{aligned}
\frac{C_n^j C_n^k}{C_{j+k}^{2n}} \int_\tau \sigma_{j+k}^{(2n)}(\overrightarrow{\xi})d\xi d\eta &= \frac{C_n^j C_n^k}{C_{j+k}^{2n}} \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{W}_q \sigma_{j+k}^{(2n)}(\overrightarrow{\xi}_q) &(6.91)\\
\Longleftrightarrow \int_\tau \sigma_{j+k}^{(2n)}(\overrightarrow{\xi})d\xi d\eta &= \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{W}_q \sigma_{j+k}^{(2n)}(\overrightarrow{\xi}_q), &(6.92)
\end{aligned}$$

comme $j + k$ varie de 0 à $2n$ et par hypothèse on a

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \mathcal{N} \geq B_{n+1}\\
&(ii) \quad \forall q = 1, 2, \ldots \mathcal{N} \quad \mathcal{W}_q = \widetilde{\mathcal{W}}(\overrightarrow{\xi}_q), \text{ avec } \widetilde{\mathcal{W}} \in \mathbb{P}_{2n}(\tau),
\end{aligned}$$

alors en vertu de la **propriété 9** il existe un unique polynôme $\widetilde{\mathcal{W}} \in \mathbb{P}_{2n}(\tau)$ vérifiant (6.92) pour tout $j + k$. Donc l'intégration numérique (6.85) est exacte dans τ pour tout $k = 0, 1, \ldots, B_n - 1$ et pour tout polynôme $(UJ) \in \mathbb{P}_n(\Omega)$.

□

En d'autres termes, il suffit qu'après chaque remaillage il existe suffisamment de particules par maille pour intégrer exactement les moments de n'importe quelle fonction (UJ) polynômiale. La diffusion numérique introduite par le remaillage est ainsi limitée et on réinitialise le schéma numérique avec le nouveau maillage $\mathcal{M}$ et les moments définis par les particules dans τ

$$\forall 0 \leq k \leq B_n - 1 \quad \sum_{q=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{W}_q (UJ)_q \sigma_k(\overrightarrow{\xi}_q) := M_{UJ,k}. \tag{6.93}$$

L'idée d'utiliser pleinement les propriétés du jacobien de la transformation Euler $\rightarrow$ Lagrange lors des remaillages a donné lieu à de récents travaux. En particulier on trouve dans [43], [40], [41] et [42] toute une série développant l'utilisation de matrices jacobiennes et des propriétés de celles-ci. Dans [37] il est question de la mise en forme de remaillages. Plus précisement il est déterminé un maillage suffisamment régulier et le plus proche possible du « maillage » lagrangien (celui où les positions des nœuds sont multi-évaluées, et les triangles peuvent se recouvrir ou s'écarter). On y détermine une matrice jacobienne moyenne définissant une transformation qui associe un maillage régulier au maillage de départ.
L'utilisation de particules permet de s'affranchir de telles techniques. Ces masses de Dirac transportent l'information sur le taux de dilatation ponctuel (le jacobien) dans leur déplacement. Il suffit ensuite de choisir un maillage régulier dans lequel on reconstruit non seulement le fluide mais aussi la matrice jacobienne.

6.4 Remarques et discussion

Nous avons regroupé dans cette partie un ensemble de remarques concernant cette méthode numérique en deux dimensions d'espace.

6.4.1 Sur les conditions aux limites en deux dimensions d'espace

Dans le chapitre **4.4** nous avons précisé comment étaient traitées les conditions aux limites en 1D. En 2D on utilise les mêmes concepts : on impose la solution au problème de Riemann sur les arêtes en contact avec le monde extérieur. Nous pouvons imposer au choix : le moment de la vitesse normale le long de l'arête $\overset{*}{\nu}_{k,h}$ ou bien le moment de la pression le long de l'arête $\overset{*}{p}_{k,h}$ (k fait référence à la fonction de base σ_k non identiquement nulle sur l'arête h). Ainsi de nombreux types de conditions limites sont simulables

- des conditions aux limites de type piston avec $\overset{*}{\nu} = D$. Le cas particulier $D = 0$ correspond à une condition limite de type mur, de plus D peut-être dépendant du temps ;
- des conditions aux limites de type compression/dilatation avec $\overset{*}{p} = P$. Le cas particulier $P = 0$ correspond à une détente dans le vide, et la pression du monde extérieur P peut-être elle aussi dépendante du temps.

Les cas tests 2D (voir le **chapitre 7**) vont permettre de mettre en œuvre quelques unes des possibilités, nous simulerons des conditions des murs, des flux entrant/sortant, des compressions, des dilatations, des détentes dans le vide...

6.4.2 Sur les discontinuités de contact et les lignes de glissement alignées avec le maillage

Discontinuités de contact. Une discontinuité de contact alignée avec le maillage à l'instant initial est résolue de manière exacte par le schéma numérique 2D. Comme la pression et la vitesse (normale et tangentielle) sont égales de part et d'autre de la discontinuité de contact, alors sur ces arêtes le solveur de Riemann donne les moments exacts pour la vitesse normale et la pression : la discontinuité de contact, même si elle est en translation, reste identique à elle même au cours du temps.

Lignes de glissement. Une ligne de glissement est une discontinuité de contact où les vitesses tangentielles de part et d'autre de la discontinuité sont différentes : « les fluides glissent l'un sur l'autre ». Cette situation viole l'équation de continuité en Lagrange. *A priori* une telle configuration ne peut-être simulée avec une méthode purement lagrangienne. Cependant à l'aide de notre technique de remaillage, on peut à chaque cycle de calcul projeter l'information sur une population de particules et remailler le domaine avec le maillage initial. La méthode utilisée comme telle se rapproche alors fortement des méthodes ALE « *Arbitrary-Lagrangian-Eulerian* » sur le principe : un pas lagrangien puis une projection sur un maillage eulérien en coordonnées d'Euler. Cette situation est un bon cas pour tester la méthode de remaillage en 2D (voir le cas **7.2**).

6.4.3 Sur l'affichage des résultats

La méthode numérique rend le vecteur des moments des fonctions UJ à l'instant final T : $\left\{M^T_{UJ,k}\right\}_{k=0}^{B_n-1}$. Un problème non trivial se pose alors : *comment traduire ces moments et visualiser une information pertinente ?* En effet à partir des B_n moments il existe une infinité de fonctions UJ ayant les mêmes moments. De ce fait il nous faut choisir la plus naturelle possible. En faisant une hypothèse sur l'espace dans lequel vit la fonction UJ, on peut s'arranger pour n'avoir qu'une unique solution UJ (par exemple si $(UJ) \in \mathbb{P}_n$), mais cette hypothèse n'a pas véritablement de raison d'être. Pour autant le choix de cette fonction, parmi l'infinité qui a les mêmes moments, n'influe en rien sur la méthode numérique : il ne s'agit que d'« afficher les résultats ».

Nous avons donc choisi plusieurs options d'affichage :
• La première option consiste à placer une particule au centre de sa maille lagrangienne et de lui affecter un poids $\sum_{k=0}^{B_n-1} M^T_{UJ,k}$ qui est une moyenne de UJ dans la maille[2] ;
• La deuxième option consiste à placer un nombre assez important de particules dans chaque maille et à leur affecter les poids issus des polynômes (n)-diffusés $\widehat{UJ}$. Cette deuxième option permet de suivre l'évolution du domaine à l'aide de beaucoup de particules à un coût faible car les polynômes (n)-diffusés sont très rapides à calculer ;
• La troisième option consiste à calculer les polynômes $\widetilde{UJ}$ qui ont les mêmes moments que ceux donnés par le schéma. Pour cela il faut inverser un système linéaire par maille (voir le **lemme 6**), et chaque élément de la matrice correspond à une somme sur toutes les particules de la maille. Pour un maillage très important, avec un grand nombre de particules par maille, ces inversions peuvent devenir assez coûteuses pour un gain en visualisation pas toujours évident.
En général, la deuxième option est utilisée pour tracer les résultats numériques.

6.4.4 Sur le déplacement des particules

Lors du remaillage ou de la visualisation des résultats, il est nécessaire de connaitre la position eulérienne des particules. Comme une particule lagrangienne ne change pas de position lagrangienne au cours du temps et que l'on connait la valeur de la vitesse en ce point (c'est le rapport des valeurs des polynômes (n)-diffusés définis dans l'unique triangle T tel que $\xi_p \in T$). Par exemple à t_{n+1}

$$\widehat{u}_p^{n+1} = \frac{\widehat{\rho u J}^{n+1}(\xi_p)}{\widehat{\rho J}^{n+1}(\xi_p)} \tag{6.94}$$

$$\widehat{v}_p^{n+1} = \frac{\widehat{\rho v J}^{n+1}(\xi_p)}{\widehat{\rho J}^{n+1}(\xi_p)}, \tag{6.95}$$

[2]Ce poids est une moyenne car la base des polynômes de Bernstein partitionne l'unité.

et plus généralement pour t_k, $1 \leq k \leq n+1$

$$\widehat{u}_p^k = \frac{\widehat{\rho u J}^k(\xi_p)}{\widehat{\rho J}^k(\xi_p)} \tag{6.96}$$

$$\widehat{v}_p^k = \frac{\widehat{\rho v J}^k(\xi_p)}{\widehat{\rho J}^k(\xi_p)}, \tag{6.97}$$

on est alors capable d'établir les formules suivantes

$$X_p^{n+1} = \xi_p + \sum_{k=1}^{n+1} (\Delta t)_k \ \widehat{u}_p^k \tag{6.98}$$

$$Y_p^{n+1} = \eta_p + \sum_{k=1}^{n+1} (\Delta t)_k \ \widehat{v}_p^k, \tag{6.99}$$

où $(X_p, Y_p)^t$ est la position eulérienne de la particule p, $(\xi_p, \eta_p)^t$ sa position lagrangienne. Notons que $(\Delta t)_k$ est la valeur du pas de temps pour le $k$ème cycle. De plus $\widehat{u}_p^k, \widehat{v}_p^k$ dépendent du numéro du triangle dans lequel la particule est positionnée.
Enfin il est bon de remarquer qu'une particule positionnée sur une arrête ne pose aucun problème ni théorique ni pratique. Elle est décomposée en deux particules pour chacun des deux triangles. Chacune d'elles se déplace avec la vitesse de son triangle d'affectation (les polynômes sont discontinus d'une maille à l'autre ainsi l'est la vitesse). De la même manière une particule sur un nœud est cassée en k particules appartenant aux k triangles ayant ce nœud pour sommet.

La méthode numérique en deux dimensions d'espace est désormais complète. Dans le prochain chapitre nous proposons un ensemble de cas tests en mécanique des fluides susceptibles d'illustrer le comportement de la méthode numérique, ainsi que la méthode de remaillage.

Chapter 7

Essais numériques en deux dimensions d'espace

Le schéma numérique que nous allons tester est construit à partir des polynômes d'ordre (2), les données sont des paraboloïdes par maille. Comme pour les cas 1D, on tracera au choix l'interpolation linéaire entre les valeurs moyennes par mailles (option 1), ou encore l'interpolation linéaire entre les valeurs portées par les particules (option 2). Dans la plupart des cas on tracera un dégradé de couleurs en 2D entre ces valeurs. Plus rarement on représentera une vue en 3D des résultats où l'azimut sera la variable observée. Dans ce dernier cas la variable azimut et la couleur pourront être redondantes.

Les maillages seront toujours triangulaires non structurés. On les représentera en début de calcul en apportant un certain nombre d'informations sur celui-ci (nombre de points, de cellules). Il est bon de noter que le maillage, même s'il présente de nombreuses symétries, est non structuré. D'autant plus que dès le premier cycle de calcul il devient très compliqué, voire impossible de donner sa position exacte dans l'espace physique. C'est la raison pour laquelle nous n'aurons jamais accès au maillage à l'instant final. Seules les particules permettront de donner une « forme » au domaine physique.

7.1 Cas test en mécanique des fluides 2D

7.1.1 Tube à choc de Sod plan

Sur $\Omega = [0,1] \times [0,0.04]$ on se donne un maillage non structuré de 3200 mailles (201 nœuds dans la direction $\overrightarrow{i}$, 5 dans la direction $\overrightarrow{j}$). Les états, gauche et droit, séparés par la droite $X = 0.5$, sont ceux du tube à choc de Sod 1D (voir **(5.1.2)**). Ce test est en fait monodimensionnel mais on le traite avec le schéma 2D afin de vérifier l'adéquation des résultats mono- et bidimensionnels. Dans chaque maille on place 6 particules. Elles se déplacent et suivent la matière au cours du temps. A l'instant $T = 0.2$ on visualise les résultats : on calcule les poids des particules en fonction des moments des variables physiques et l'on génère un nouveau maillage à partir de ces particules placées à leur position eulérienne, le logiciel de dessin effectue une interpolation entre les poids des particules. Ceci donne la figure 7.2 où la couleur et l'azimut sont redondantes pour les particules et la solution exacte.

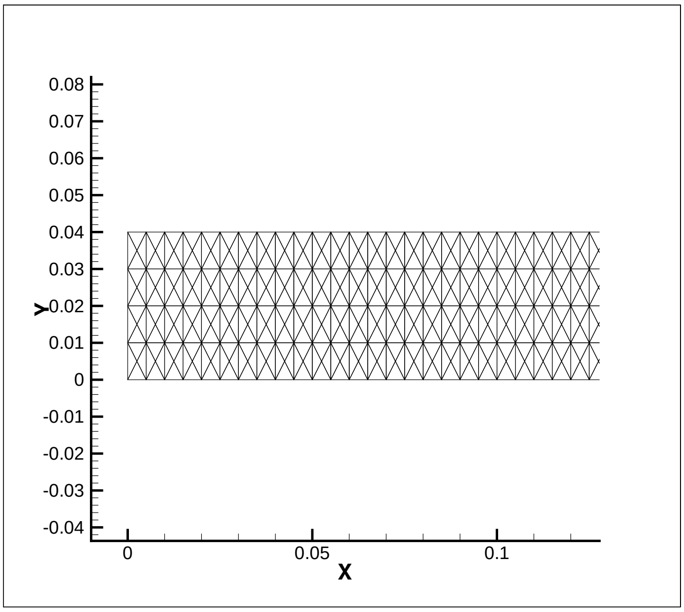


Figure 7.1: Tube à choc de Sod 2D - Détails du maillage uniforme à 201×5 nœuds

On compare ensuite la solution approchée et la solution exacte sur une coupe le long de la droite $Y \simeq 0.12$ (sur cet axe on extrait 200 points équirépartis suivant la direction $\vec{i}$ et on présente la valeur de la parabole $\widehat{\rho}$ en ces points). Sur les courbes 7.3 on remarque que les ondes sont bien rendues, leur position ainsi que les états intermédaires suivent la solution exacte. Cependant un peu plus de diffusion numérique a été ajoutée par le limiteur expliquant les différences avec les courbes issues du schéma 1D. Il est clair qu'un travail plus approfondi sur ce type de limiteur en Lagrange pour des polynômes devrait sensiblement améliorer les résultats sur les détentes en particulier. La courbe 7.2 présente surtout l'intérêt de montrer que les particules restent confinées dans le domaine, et que chacune d'entre elles porte une valeur numérique proche de la solution exacte. Il n'est donc pas nécessaire de faire une moyenne sur un nombre plus ou moins grand de particules pour atteindre une valeur moyenne acceptable comme c'est le cas dans certaines méthodes particulaires de type statistique : chacune de nos particules porte des poids proches de la solution exacte.

Pour illustrer que la visualisation des résultats est un point relativement délicat, nous présentons dans 7.5 un tube à choc de Sod à quatre états sur un maillage 40×40 (voir la figure 7.4 pour une description du cas). La courbe de gauche présente la position eulérienne d'une particule initialement au centre de gravité de son triangle lagrangien. La couleur représente bien évidemment la valeur de la densité. Sur la courbe de droite il s'agit de l'interpolation linéaire obtenue à partir de ces particules. Lorsque l'on observe les particules les ondes sont facilement reconnaissables et les états sont très clairement distincts. Par contre la représentation interpolée entre les particules peut donner l'illusion d'une onde de choc et d'une discontinuité de contact plus diffusée qu'elles ne le sont en réalité, voire même d'oscillations numériques. En fait la courbe de gauche présente le véritable résultat donné par la méthode, la courbe de droite est une « représentation » de celui-ci ; comme toutes les représentations, elle n'est pas toujours pertinente.

7.1.2 Dilatation d'un gaz par un piston uniformément accéléré

Sur $\Omega = [0,1] \times [-0.02, 0.02]$ on se donne un maillage non structuré de 1600 mailles (101 nœuds dans la direction $\overrightarrow{i}$, 5 dans la direction $\overrightarrow{j}$). Un gaz parfait est au repos avec les données initiales suivantes

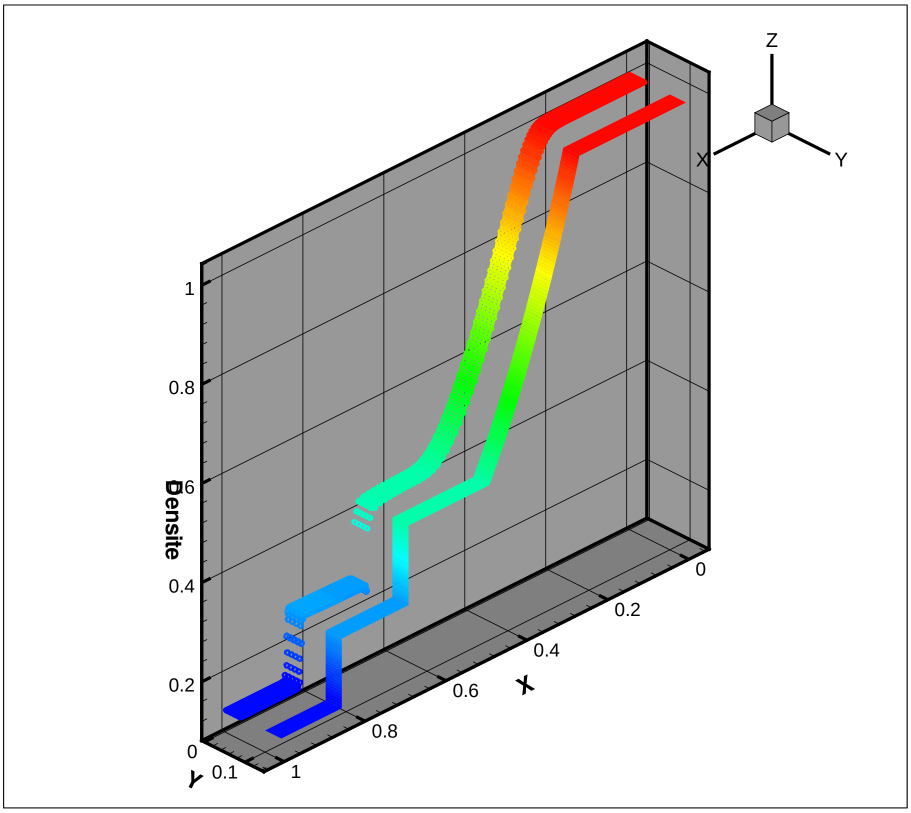
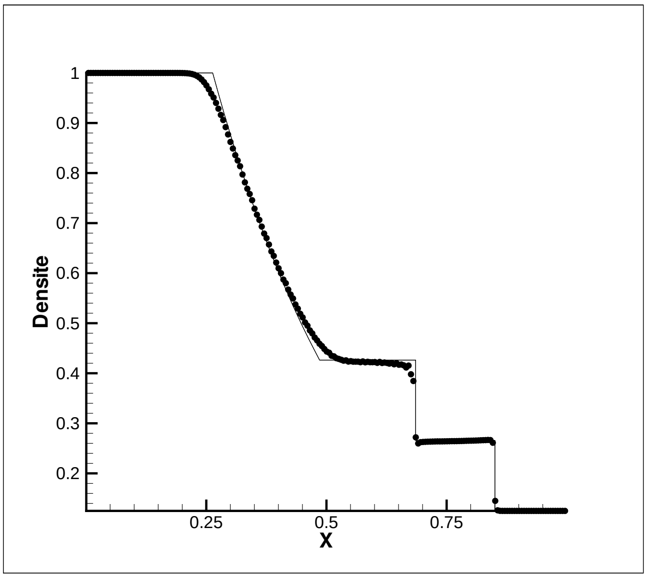
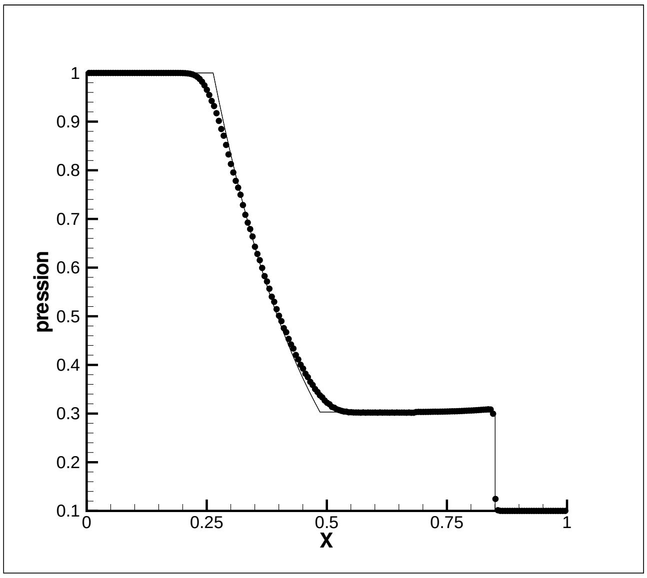


Figure 7.2: Tube à choc de Sod 2D - Maillage uniforme à 201 × 5 nœuds - Densité portée par les particules et Densité exacte - La couleur et l'azimut sont redondantes



Densité avec 201 mailles



Pression avec 201 mailles

Figure 7.3: Tube à choc de Sod 2D - Maillage uniforme à 201 × 5 nœuds - Coupe 1D en $Y \simeq 0.12$

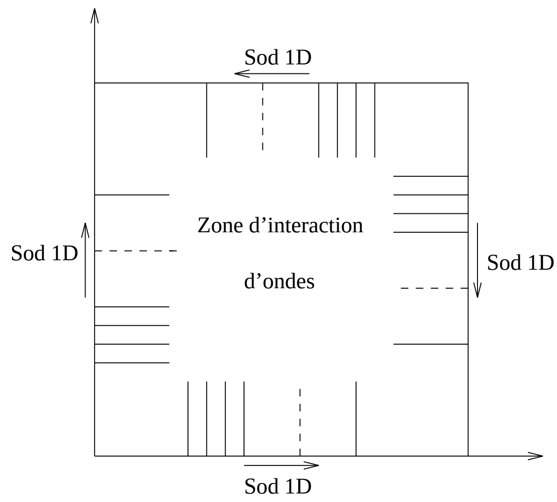
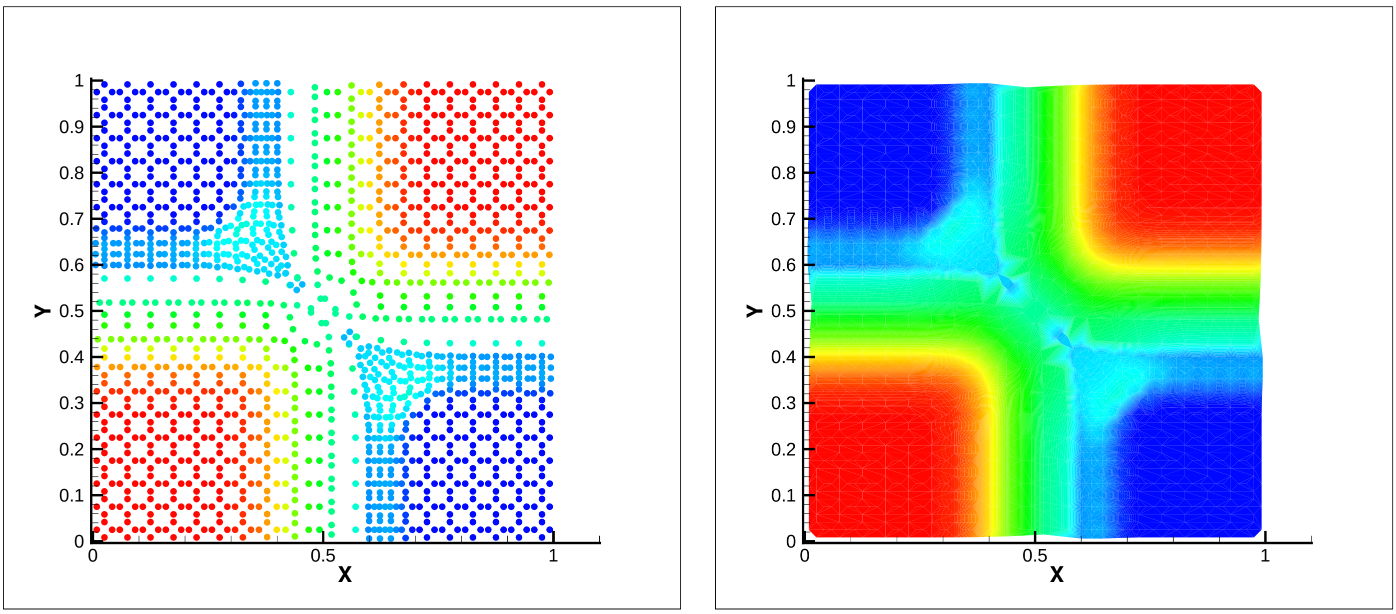


Figure 7.4: Tube à choc de Sod 4 états - Etat à $t = 0$ (gauche) et à $t > 0$ (droite)



Densité : 1 particule au centre de gravité

Densité : interpolation linéaire

Figure 7.5: Tube à choc de Sod 4 états - Maillage 40×40 nœuds - Comparaison de la visualisation des particules et une interpolation linéaire entre celles-ci

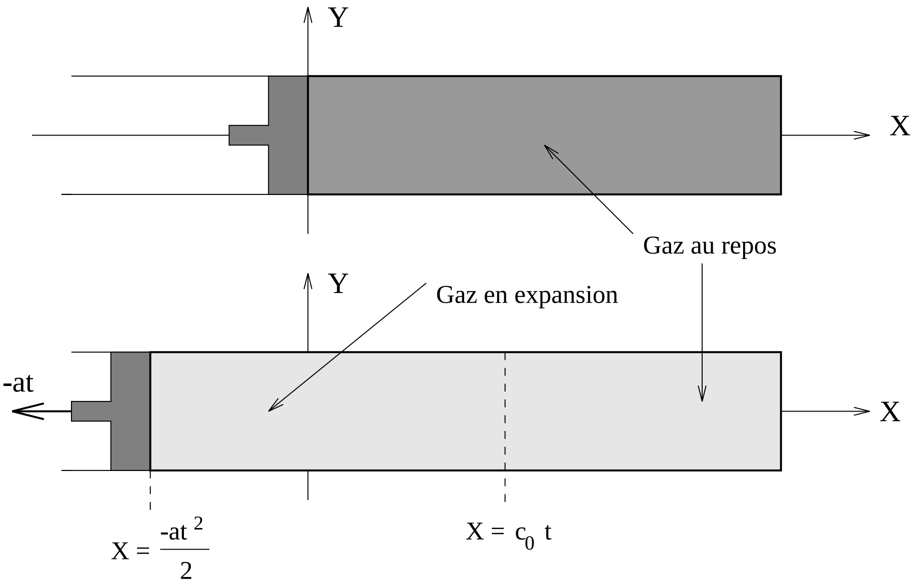


Figure 7.6: Schéma de la dilatation d'un gaz par un piston uniformément accéléré $t = 0$ (haut), $t \neq 0$ (bas).

	Etat initial
ρ_0	1
$\overrightarrow{V}_0$	$(0,0)$
p_0	1

Les conditions aux limites sont de type mur, sauf sur le bord ouest où une condition limite de type piston est appliquée. Ce piston se déplace avec une vitesse uniformément accélérée soit (voir la figure 7.6) :

$$\overrightarrow{D} = -at\overrightarrow{i} \quad a \in \mathbb{R}^{+*}. \tag{7.1}$$

Une onde de détente va se former lors de l'aspiration. Le front de l'onde se propage vers la droite à la vitesse du son c_0, le fluide suit le piston dans son déplacement donc, à gauche, le fluide se déplace à la vitesse $-at$ pour $0 < t < \frac{2c_0}{(\gamma-1)a}$. Pour $t > \frac{2c_0}{(\gamma-1)a}$ un phénomène de cavitation a lieu entre le piston et le fluide dont la vitesse ne peut dépasser la vitesse d'une détente dans le vide.
Ce cas test est fondamentalement monodimensionnel, il permet cependant de tester la méthode 2D pour des conditions limites un peu particulières. Notons que de telles conditions limites peuvent être relativement difficiles à mettre en œuvre en formulation eulérienne, puisque le bord ouest se déplace avec une vitesse non uniforme. En lagrange on peut imposer une condition limite « variable », il faut cependant remarquer que le pas de temps devra rester relativement petit pour correctement représenter une évolution uniformément accélérée. En effet, la valeur $u^*_{ext} = -at_n$ imposée au bord ouest dépend du temps t_n, au cycle suivant elle devient $u^*_{ext} = -at_{n+1}$, si Δt est « grand », alors on ne simulera pas correctement l'évolution linéaire de u^*_{ext} et les résultats s'en ressentiront.
Aucun remaillage n'a été nécessaire et nous présentons les résultats pour $a = 0.5$ et $T = 0.45$, ce qui correspond à un temps physique inférieur au temps d'apparition de la cavitation, la dilatation est de l'ordre de 20%. Les fronts de l'onde sont alors positionnés aux points $X^- = -a\frac{t^2}{2} = -0.0507$, et $X^+ = c_0 t = 0.533$. La solution exacte pour la vitesse est donnée par la formule ([30])

$$u_{ex} = -\frac{c_0 + \frac{\gamma-1}{2}at}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\sqrt{\left(c_0 + \frac{\gamma-1}{2}at\right)^2 + 2a\gamma(c_0 t - X)} \tag{7.2}$$

$$v_{ex} = 0. \tag{7.3}$$

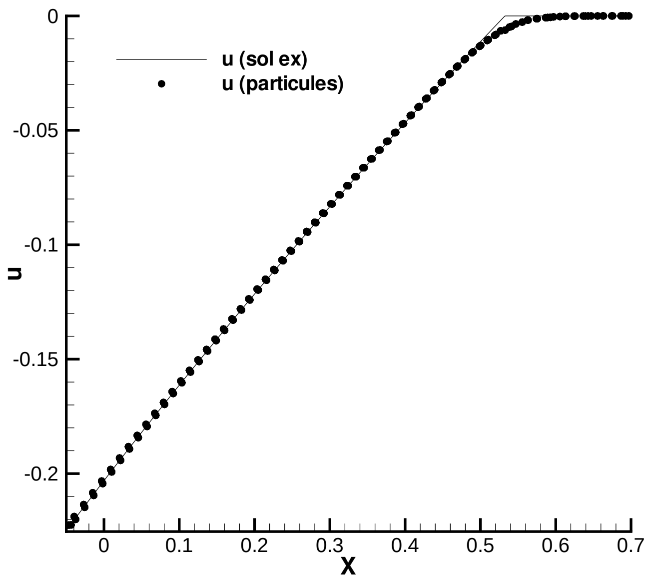


Figure 7.7: Dilatation d'un gaz par un piston uniformément accéléré : u_{ex} / u_{num} coupe en $y = 0.0$

Les résultats pour u sont portés dans la figure 7.7 et on trouve l'encadrement suivant pour v

$$1.09\ 10^{-3} \leq v \leq 2.28\ 10^{-3}, \tag{7.4}$$

prouvant que la méthode s'adapte assez bien à ce type de condition aux limites. Comme la solution exacte n'est **jamais** constante sur aucun intervalle, il nous a semblé que ce test était pertinent pour mesurer la précision de la méthode. Cependant cette mesure est relativement difficile à réaliser. En effet le schéma numérique induit la précision théorique de la méthode lagrangienne, mais il faut ajouter la précicion de la projection sur la population de particules et du déplacement de celle-ci. Nous avons choisi volontairement d'effectuer un calcul de précision classique ne prenant en compte qu'une valeur moyenne par maille sans considérer l'aspect parabolique de la solution numérique.
Précisons comment sont calculées les normes. Au centre de gravité de chaque maille T on place une particule qui se déplace à la vitesse de la matière et se trouve à $t = t_{n+1}$ à la position eulérienne $\overrightarrow{X}_p$. Cette particule porte le poids $\overline{u}_p^T$ qui est la moyenne suivante

$$\overline{u}_p^T = \frac{\sum_{k=0}^{B_n-1} M_{\rho uJ,k}^{n+1}}{\sum_{k=0}^{B_n-1} M_{\rho J,k}^{n+1}}. \tag{7.5}$$

L'erreur pour un maillage donné est alors

$$E_2 = \sum_T |u_{ex}(\overrightarrow{X}_p) - \overline{u}_p^T|^2 \tag{7.6}$$

$$E_\infty = \max_T |u_{ex}(\overrightarrow{X}_p) - \overline{u}_p^T|. \tag{7.7}$$

Notons que cette erreur prend en compte l'erreur de la méthode numérique lagrangienne mais aussi l'erreur sur le déplacement du centre de gravité. En théorie ces deux erreurs devraient être découplées pour mieux apprécier l'importance de l'une par rapport à l'autre. Mais la difficulté de trouver une mesure pertinente de ces deux erreurs indépendamment l'une de l'autre nous a convaincu de les calculer de manière classique en étant

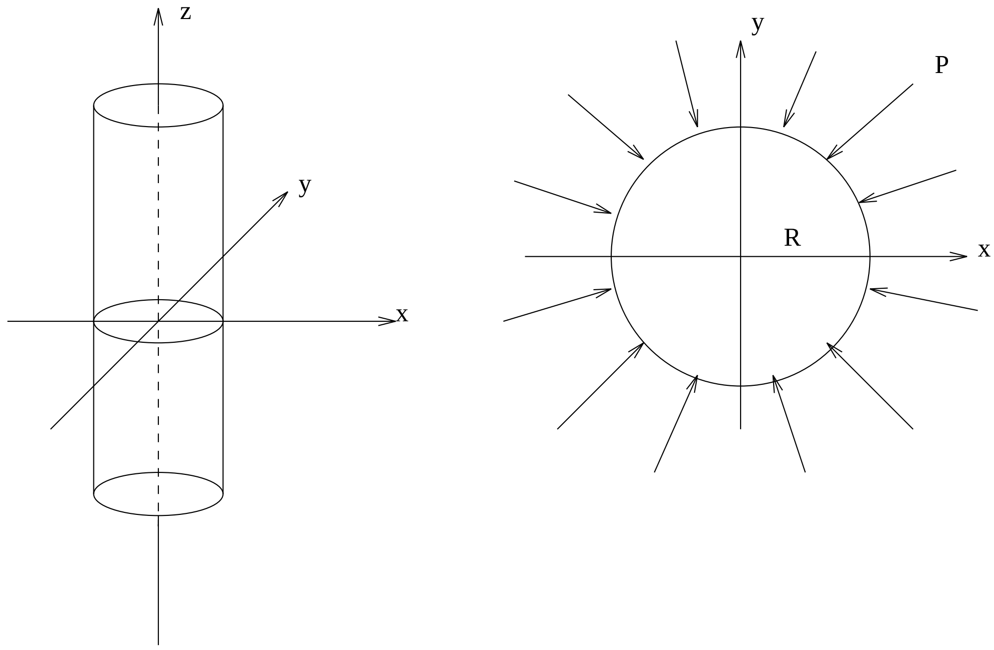


Figure 7.8: Compression d'un cylindre par une onde de choc

conscient de l'amalgame ainsi fait. Le calcul en norme L_∞ et L_2 de la solution numérique pour des maillages dont la taille double donne le tableau

Nb mailles	erreur L_2	Rapport	erreur L_∞	Rapport
10	1.296290278	$---$	$0.8867307007E-01$	$---$
20	0.2894025743	4.48	$0.2415154129E-01$	3.67
40	$0.4786172882E-01$	6.05	$0.1020137034E-01$	2.37
80	$0.2287551947E-01$	2.09	$0.5362879485E-02$	1.90
160	$0.1336168870E-01$	1.71	$0.3537145443E-02$	1.52
320	$0.7429419085E-02$	1.80	$0.2193391789E-02$	1.61
640	$0.3879738257E-03$	1.91	$0.1252242676E-03$	1.78

7.1.3 Compression d'un cylindre infiniment long

Soit un cylindre infiniment long de section circulaire de rayon $R = 1$ rempli d'un gaz au repos. Une onde de choc cylindrique frappe celui-ci. L'onde de choc pénétre dans le cylindre et se propage en direction centripète (voir la figure 7.8). A l'arrivée du choc au centre du disque la pression et la densité augmentent très fortement, c'est le point de focalisation. Après ce collapse, le choc repart dans la direction centrifuge jusqu'à atteindre les bords extérieurs du cylindre, et forcer le cylindre à se détendre.
Les données initiales sont les suivantes

	Etat initial
ρ	1
u	0
p	1

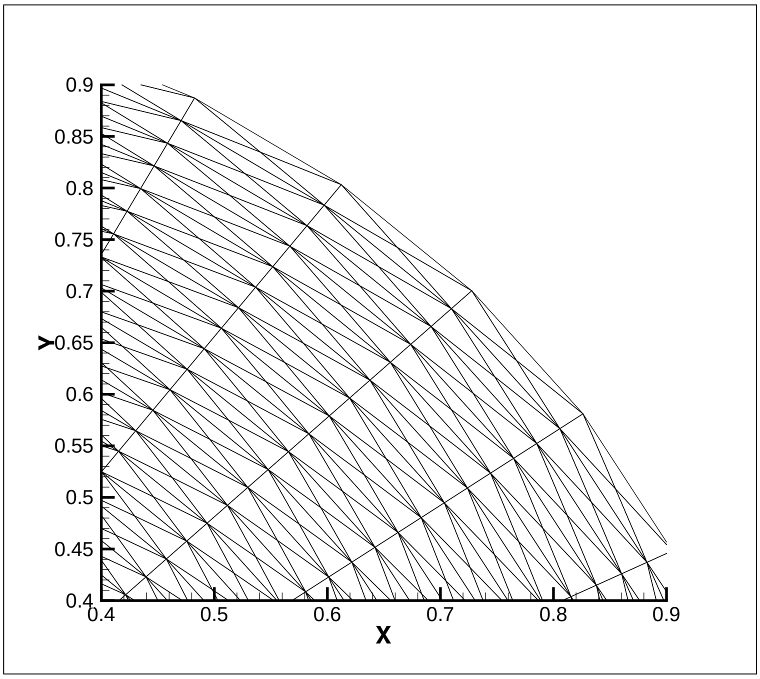


Figure 7.9: Détail du maillage du cylindre infiniment long

Les conditions aux limites sont de type compression/dilatation $P = p^*_{ext} = 100.0$ pour toutes les arêtes aux bords du domaine. Le maillage est composé de 6560 mailles et 3321 nœuds : on l'appelle 41×41, signifiant qu'il est généré à partir de 41 nœuds sur la circonférence et 41 nœuds sur chaque rayon.

Choc centripète. On présente les courbes de la pression et les vecteurs vitesses pour quatre temps : $T_0 = 0.0$, $T_1 = 0.0138$, $T_2 = 0.0288$, $T_3 = 0.0588$. Les courbes de la figure 7.10 présentent pour chaque particule, le poids pression qui lui est associé en échelle de couleur. Dans la figure 7.11, il s'agit des vecteurs vitesses sur le domaine $[0, 1] \times [0, 1]$. Un seul vecteur par maille à été tracé pour des raisons évidentes de lisibilité. On remarque qu'ils sont tous en direction radiale centripète et il ne semble pas que des oscillations numériques sur la vitesse perturbent la cylindricité.
Avec la méthode aucun remaillage n'a été nécessaire. Le pas de temps s'est naturellement adapté à la compression sans qu'aucun problème n'apparaîsse. La cylindricité est bien rendue à la précision du maillage près.
Dans les courbes qui suivent, nous comparons ces résultats à ceux donnés par le code 1D cylindrique SAIGON du CEA-CESTA afin de vérifier la position du choc ainsi que les valeurs de la pression. On demande au logiciel de visualisation d'afficher les particules appartenant au domaine $\mathcal{O} = [0, x_{max}(t)] \times [-0.001, 0.001]$. La courbe de gauche de la figure 7.12 présente la comparaison avec un calcul 1D cylindrique avec 16 mailles. La courbe de droite présente la comparaison avec un calcul 1D à 516 mailles.

Choc centrifuge (après le rebond au centre du disque). La simulation est poursuivie jusqu'à atteindre le temps $T_5 = 0.080$ *via* $T_4 = 0.079$. Ces deux temps sont représentés sur les courbes de la figure 7.13. L'échelle de couleur est cette fois-ci exponentielle. La méthode n'a pas nécessité de remaillage ; le pas de temps s'est adapté à la compression.

On observe clairement le collapse du choc au centre du disque (la pression augmente très fortement). Le choc

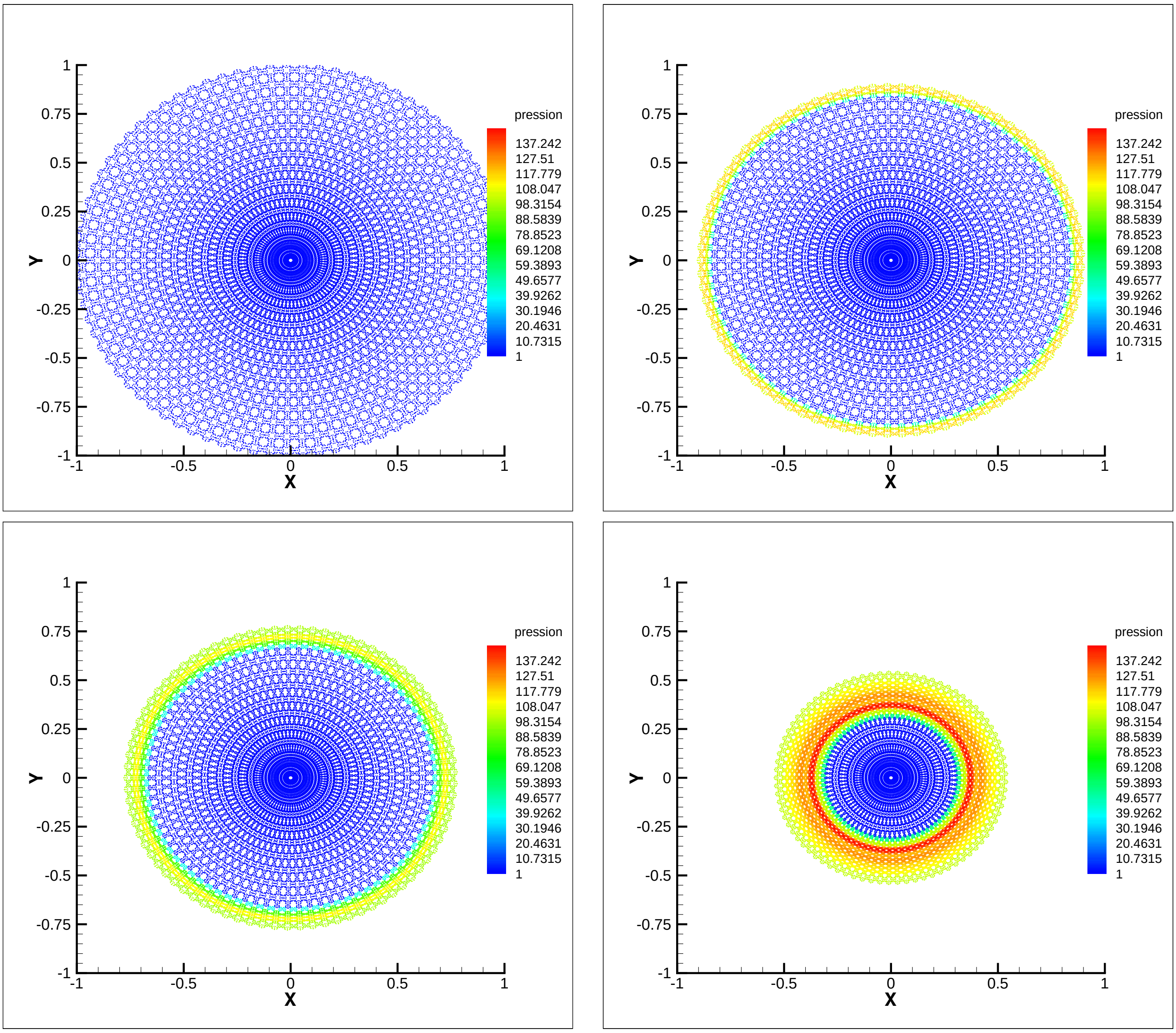


Figure 7.10: Compression d'un cylindre infiniment long ($R_{init} = 1$) - Pression portée par les particules à $T_0 = 0.0$, $T_1 = 0.0138$, $T_2 = 0.0288$, $T_3 = 0.0588$

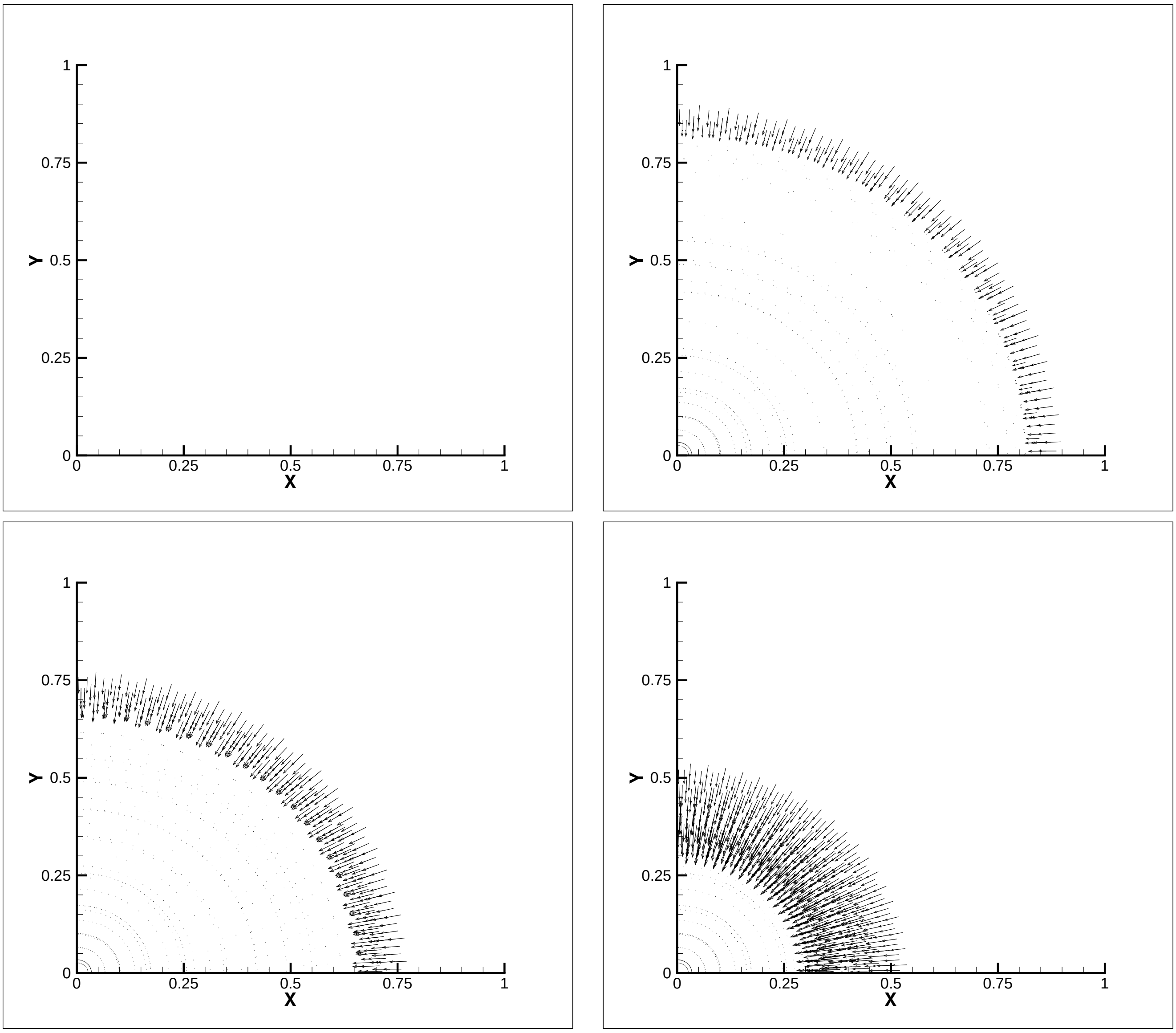


Figure 7.11: Compression d'un cylindre infiniment long ($R_{init} = 1$) - Vecteurs vitesses à $T_0 = 0.0$, $T_1 = 0.0138$, $T_2 = 0.0288$, $T_3 = 0.0588$ - Zoom sur $[0, 1] \times [0; 1]$ (une particule par maille est représentée)

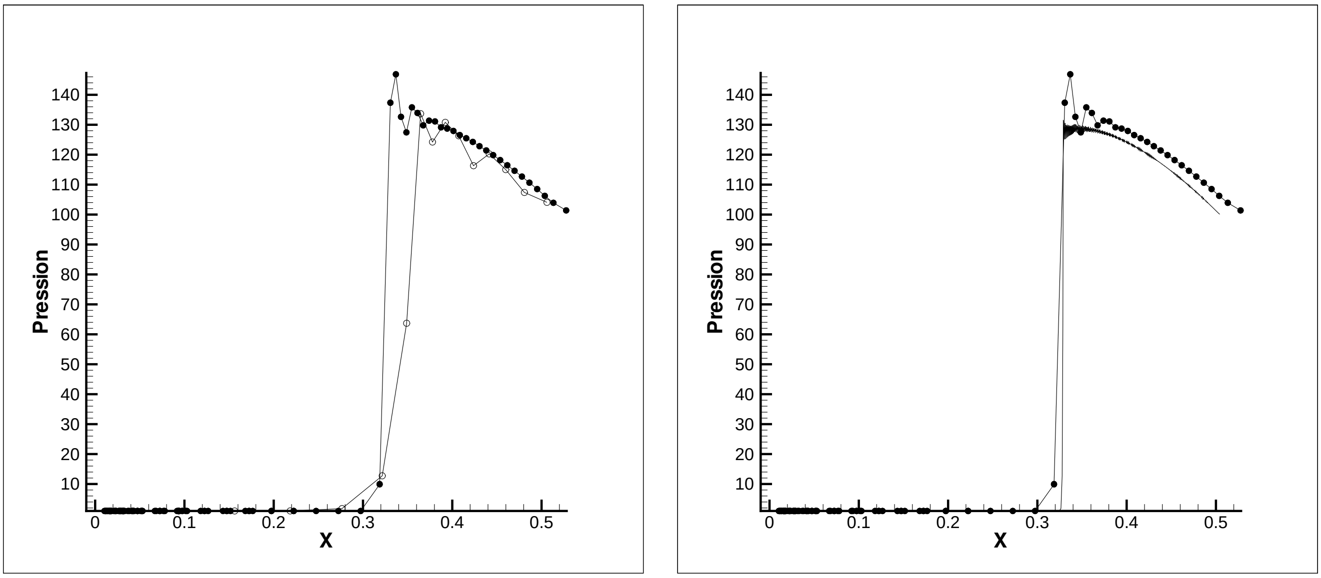


Figure 7.12: Compression d'un cylindre infiniment long ($R_{init} = 1$) - Maillage à 41×41 - Comparaison avec un code 1D cylindrique pour $T_3 = 0.0588$ - Légende : $\bullet$ particules dans $\mathcal{O}$, $\circ$ code 1D cylindrique avec 16 mailles (gauche) puis 516 mailles (droite)

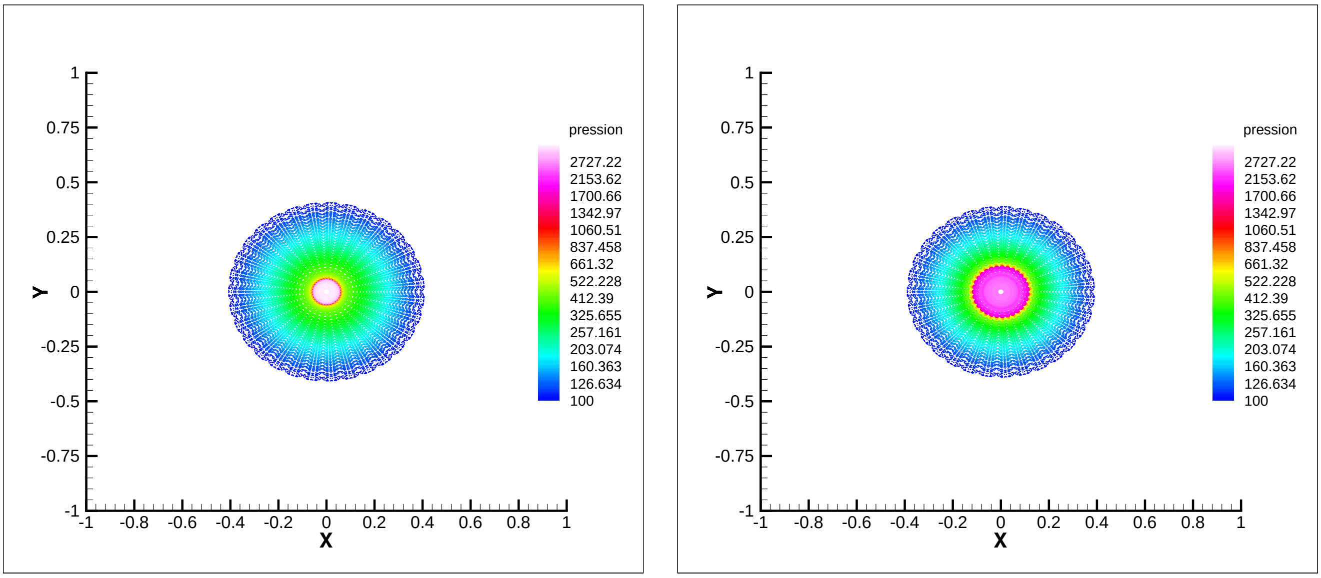


Figure 7.13: Compression d'un cylindre infiniment long ($R_{init} = 1$) - Pression portée par les particules à $T_4 = 0.070$, $T_5 = 0.080$

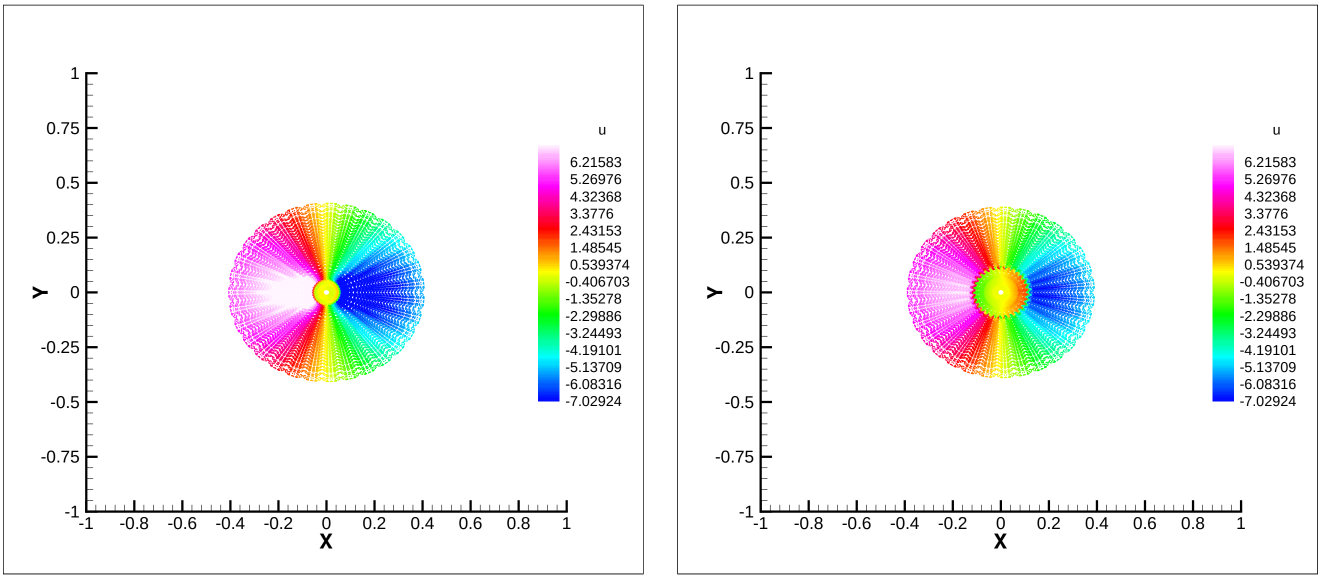


Figure 7.14: Compression d'un cylindre infiniment long ($R_{init} = 1$) - Variable u portée par les particules à $T_4 = 0.070$, $T_5 = 0.080$

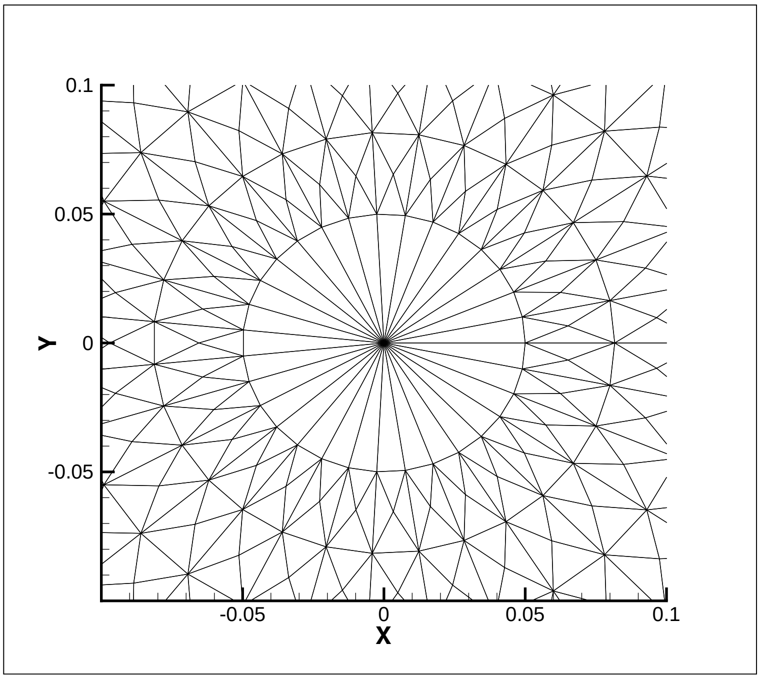


Figure 7.15: Détail du maillage au centre du disque

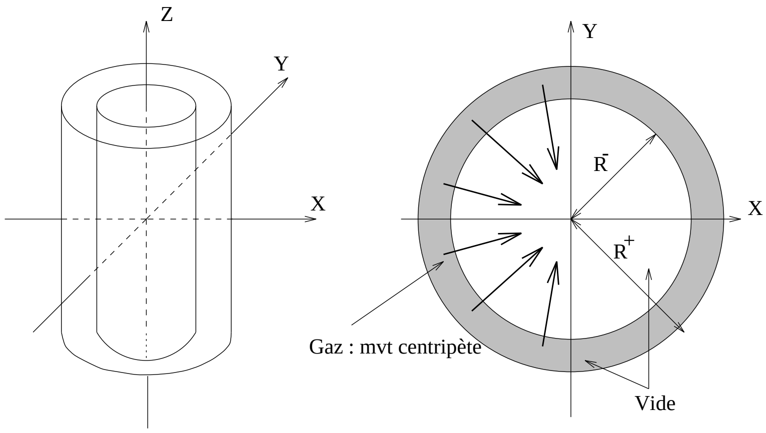


Figure 7.16: Effondrement d'une couronne

« retour », généré par le collapse, est bien rendu pour ce qui concerne la cylindricité.
Nous présentons dans la figure 7.14 la variable u (première composante de la vitesse) en échelle de couleur car les vecteurs vitesses sont difficilement exploitables pour ces temps physiques. On observe le collapse du choc au centre sur la courbe de gauche (les variables u et v sont quasiment nulles au centre) puis l'inversion des sens des vitesses au retour du choc (courbe de droite).
Il est bon de remarquer que le choc collapse sur un nœud et pas sur une maille (voir le détail du maillage dans la figure 7.15). Généralement c'est une source supplémentaire d'instabilités. Il est d'ailleurs souvent préféré un maillage où le centre du disque est positionné au centre de gravité d'un triangle.

7.1.4 Effondrement d'une couronne sur elle-même

[1] Soient deux cylindres concentriques infiniment longs de section circulaire centrés sur l'origine et de rayons $R^+ = 10$ et $R^- = 9.5$. La section perpendiculaire dans le plan $(0, \vec{X}, \vec{Y})$ est une couronne (voir la figure 7.16) appelée Ω. Elle est remplie d'un gaz dont l'équation d'état est l'équation *stiffened gaz* déjà vue lors du tube à choc bimatériaux 1D. Le pression de ce gaz est nulle et son mouvement est centripète. La couronne est entourée de vide. Les données initiales sont les suivantes

	Etat dans la couronne
ρ_0	7.82
$\|\overrightarrow{V_0}\|$	$2\ 10^5$ direction centripète
p_0	0
γ	3.5
π_∞	$350\ 10^9$

De telles conditions initiales font que la couronne va s'effondrer sur elle-même en direction de son centre. Pendant toute une période, la compression due à l'effet de cylindricité est compensée par un épaississement de la couronne (avant $T_{vol} \simeq 30\ 10^{-6}$), la densité moyenne de la couronne reste sensiblement égale à la densité initiale. Par la suite la compression par l'effet de cylindricité prend le pas sur l'épaississement et la densité moyenne croît jusqu'au refermement de la couronne.

[1]Nous remercions H.Jourdren du CEA/DIF/DSSI pour avoir mis à notre connaissance ce cas test ainsi que pour nous avoir fourni le schéma 1D cylindrique.

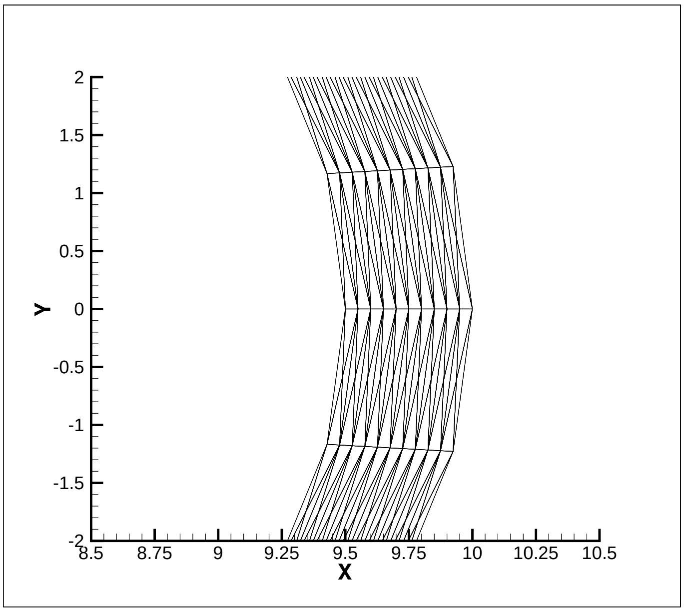


Figure 7.17: Effondrement d'une couronne sur elle même - Zoom du maillage initial 51×11

La difficulté d'un tel cas en Lagrange est de conserver la cylindricité du problème et la densité constante pendant la phase de vol (pour $t \leq T_{vol}$). Le maillage non structuré est composé de 2040 mailles, 1071 nœuds. Il est engendré par 51 points sur les circonférences de 11 cercles concentriques (voir la figure 7.17) : on l'appelle maillage 51×11. On utilisera aussi un maillage grossier 11×11.

Les conditions aux limites simulent la présence du vide avec $p^*_{ext} = 0$ sur toutes les arêtes en contact avec le monde extérieur. Aucun remaillage n'a été nécessaire lors de cette simulation. Nous nous arrêtons au temps $T \simeq 40\ 10^{-6}$ avant que la couronne ne se referme sur elle-même[2].

Les valeurs de la densité portée par les particules dans la couronne (voir 7.18) sont tracées pour quatre temps physiques $T_0 = 1.43\ 10^{-6}$, $T_1 = 2.81\ 10^{-6}$, $T_2 = 38.8\ 10^{-6}$ et $T_3 = 40.3\ 10^{-6}$. Ces courbes montrent que la cylindricité est bien respectée, la couronne reste sans ambiguïté une couronne tout au long de la simulation. De plus les vecteurs vitesses ne présentent aucun défaut provenant d'instabilités numériques, la direction centripète est particulièrement bien rendue (voir la figure 7.19).

Nous présentons maintenant la valeur moyenne de la densité dans la couronne en fonction du temps pour notre schéma 2D et le schéma 1D cylindrique de Godunov (en variable de Lagrange) dans la figure 7.20. Les oscillations observées sont dues à des ondes acoustiques qui sont générées lors de l'initialisation au contact avec le vide et qui compriment la couronne en se déplaçant vers l'intérieur de celle-ci. Elles se croisent au centre de la couronne et continuent leur chemin en direction des bords en dilatant la couronne cette fois-ci. Lorsqu'elles rencontrent les bords le paroxysme de dilatation est atteint et elles repartent en direction de l'intérieur de la couronne en la comprimant à nouveau. Qualitativement la méthode 2D donne des résultats comparables au schéma 1D cylindrique pour les deux maillages.

[2] Si on veut continuer plus longtemps et voir ce qui se passe après l'effondrement il suffit de mettre en place le remaillage au moment où deux particules diamétralement opposées à $t = 0$ se retrouvent à une distance inférieure à un ϵ. Dans ce cas on remaille avec un maillage du disque Ω puisque la couronne s'est refermée.

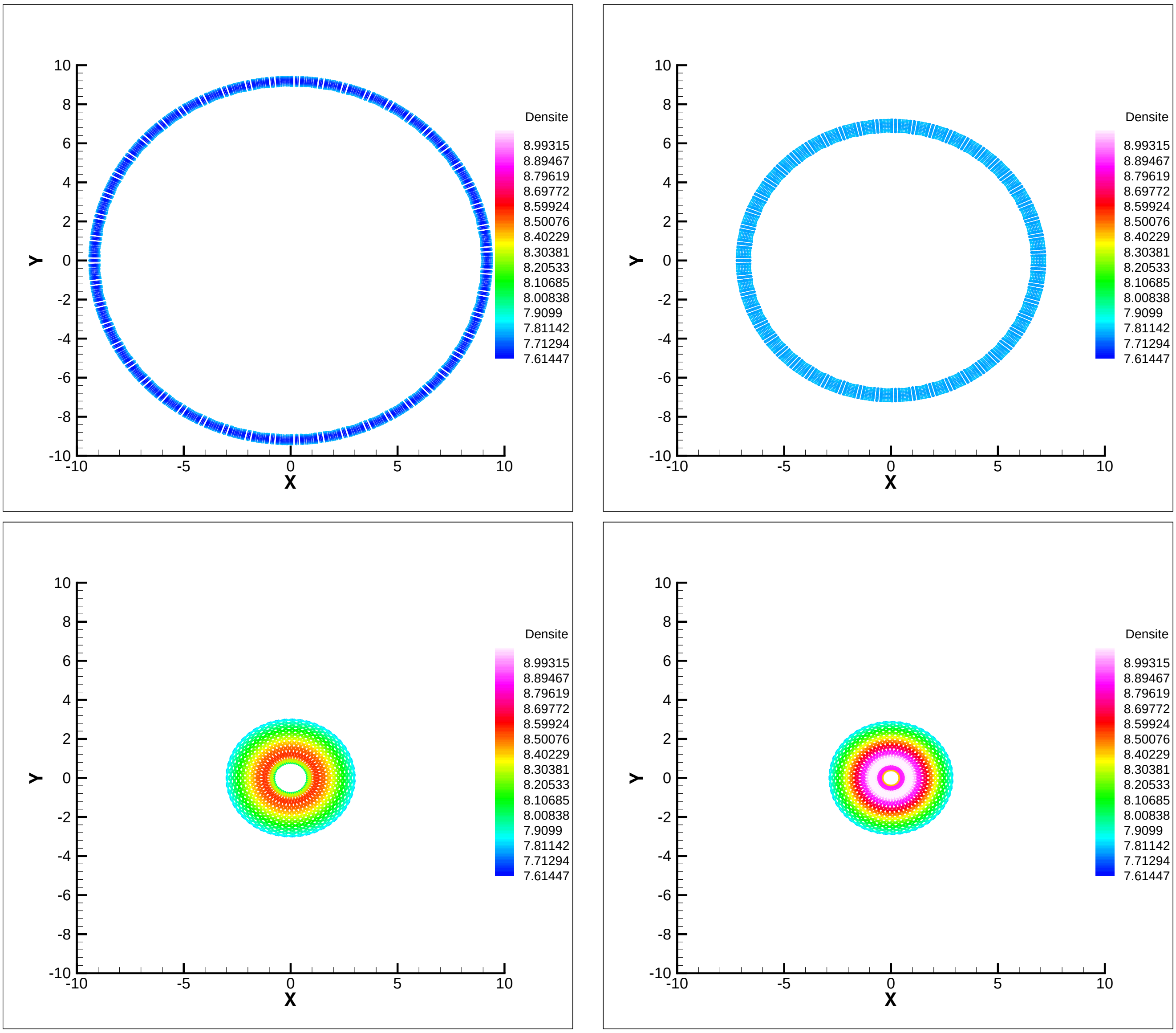


Figure 7.18: Effondrement d'une couronne - Densité portée par les particules à $T_0 = 1.43\ 10^{-6}$, $T_1 = 2.81\ 10^{-6}$, $T_2 = 38.8\ 10^{-6}$ et $T_3 = 40.3\ 10^{-6}$

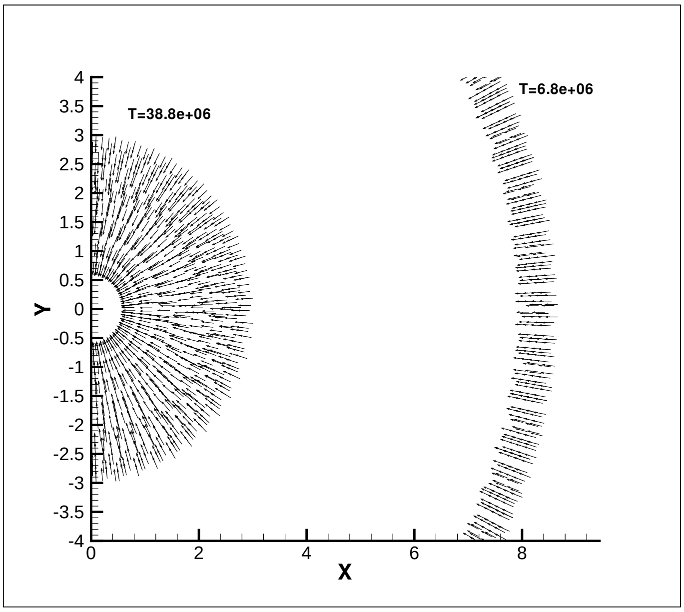


Figure 7.19: Effondrement d'une couronne - Vecteurs vitesses

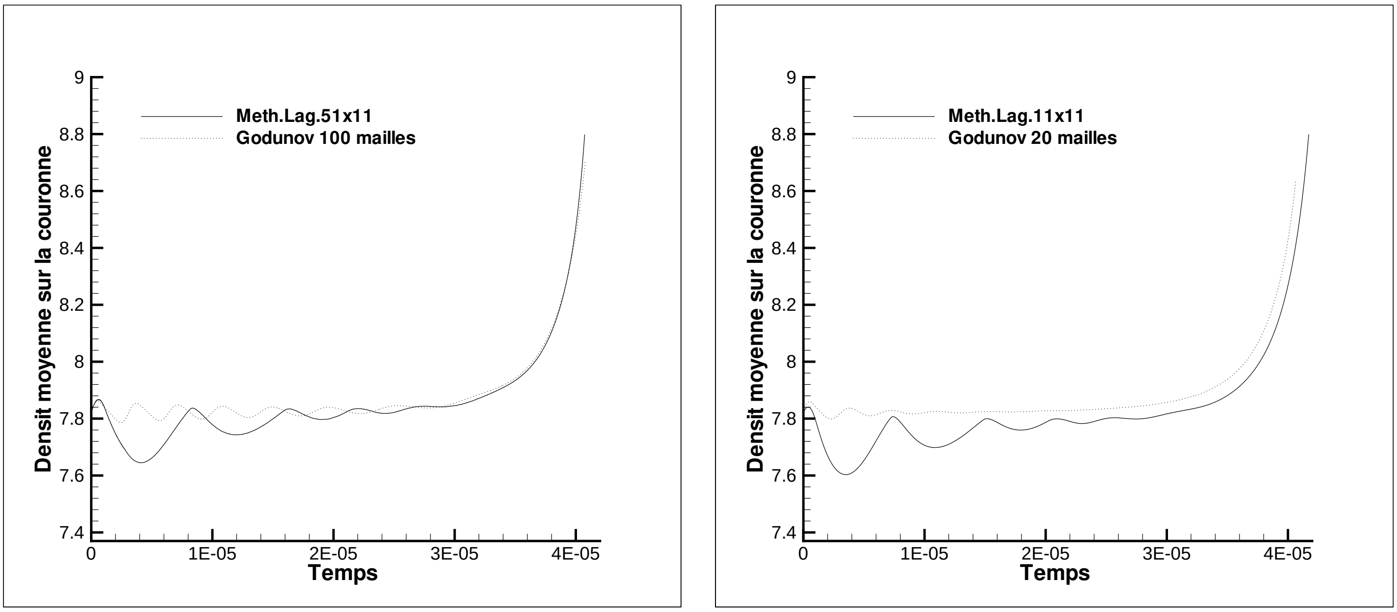


Figure 7.20: Effondrement d'une couronne - Densité moyenne en fonction du temps - Gauche : comparaison présente méthode sur maillage 51×11 et schéma de Godunov lagrangien 1D cylindrique 100 mailles - Droite : comparaison présente méthode sur maillage 11×11 et schéma de Godunov lagrangien 1D cylindrique 20 mailles

7.2 Cas test de remaillage en 2D

Dans cette partie nous nous intéressons plus spécifiquement à la méthode de remaillage pour des polynômes de base de $\mathbb{P}_2$. En premier lieu on approche des fonctions continues dans **7.2.1** après remaillage, puis dans **7.2.2** on traite un problème de glissement avec la méthode utilisée comme une méthode ALE.

7.2.1 Approximations de fonctions continues

Dans un premier temps nous allons approcher des fonctions continues sur le domaine $\Omega = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ à l'aide d'une population de particules. Puis nous changeons de maillage, en fait il s'agit d'une perturbation aléatoire relativement importante du maillage initial. La population de particules est alors repositionnée et réévaluée à l'aide de la méthode décrite dans le chapitre précédent. On regarde alors la différence entre les moments calculés et les moments exacts pour chaque fonction de base dans chaque triangle.
Les moments « exacts » sont obtenus à l'aide d'une formule de quadrature de Gauss à 12 points. Pour faciliter les comparaisons on utilise le même maillage initial et déplacé pour chaque fonction continue (voir la figure 7.21). Ces maillages sont composés de 400 mailles pour 221 nœuds. Le maillage perturbé l'est de manière aléatoire : chaque nœud est déplacé aléatoirement dans les deux directions principales.
A l'instant initial, on place aléatoirement 40 particules par maille (respectivement 100). Sur le maillage perturbé le nombre de particules par maille est très hétérogène comme le montrent les courbes de 7.22 ; en moyenne 23% des particules ont changé de maille (respectivement 30%). D'après la théorie un minimum de 15 particules par maille est nécessaire sur le maillage perturbé. Cependant la perturbation du maillage est elle aussi aléatoire, c'est pourquoi suffisamment de particules ont été initialisées pour assurer ces 15 particules. Nous avons ensuite choisi d'augmenter le nombre de particules jusqu'à 100 pour observer si l'erreur diminuait avec le nombre de particules.
C'est sur cette distribution que nous allons calculer les moments portés par les particules dans le maillage perturbé et les comparer aux moments exacts.

Fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$

Soit la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ (voir la figure 7.23). L'erreur sur les moments est donnée dans la figure 7.24. On observe clairement que la précision est de l'ordre de la précision machine. L'erreur ne peut donc pas être diminuée par une augmentation du nombre de particules par maille comme on peut le voir sur la courbe à 100 particules. Ce comportement est bien celui qui était attendu d'après la théorie.

Fonction $f(x, y) = cos(y)sin(x)$

Soit la fonction $f(x, y) = cos(y)sin(x)$ (voir la figure 7.25). Cette fonction ne peut en théorie être approchée « exactement » sans un nombre infini de particules. On regarde l'erreur commise sur les moments pour 40 puis 100 particules. L'erreur sur les moments est donnée dans la figure 7.26.

Discussion

La première remarque est que l'augmentation du nombre de particules améliore la précision du remaillage. Il est évident que plus le domaine est finement représenté, meilleure sera la précision.

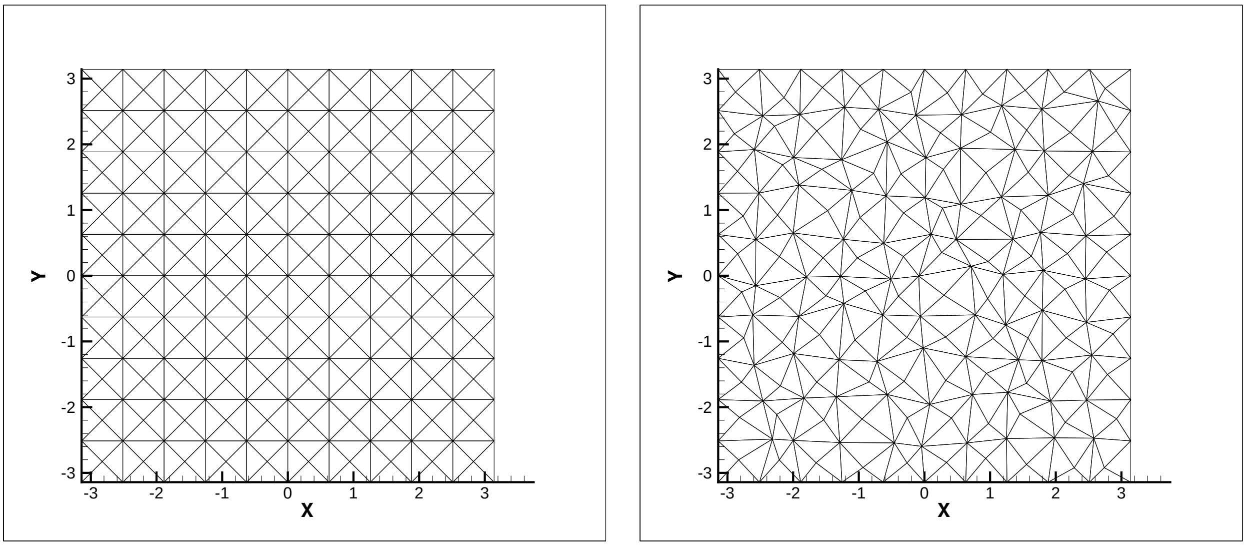


Figure 7.21: Maillages initial et maillage perturbé

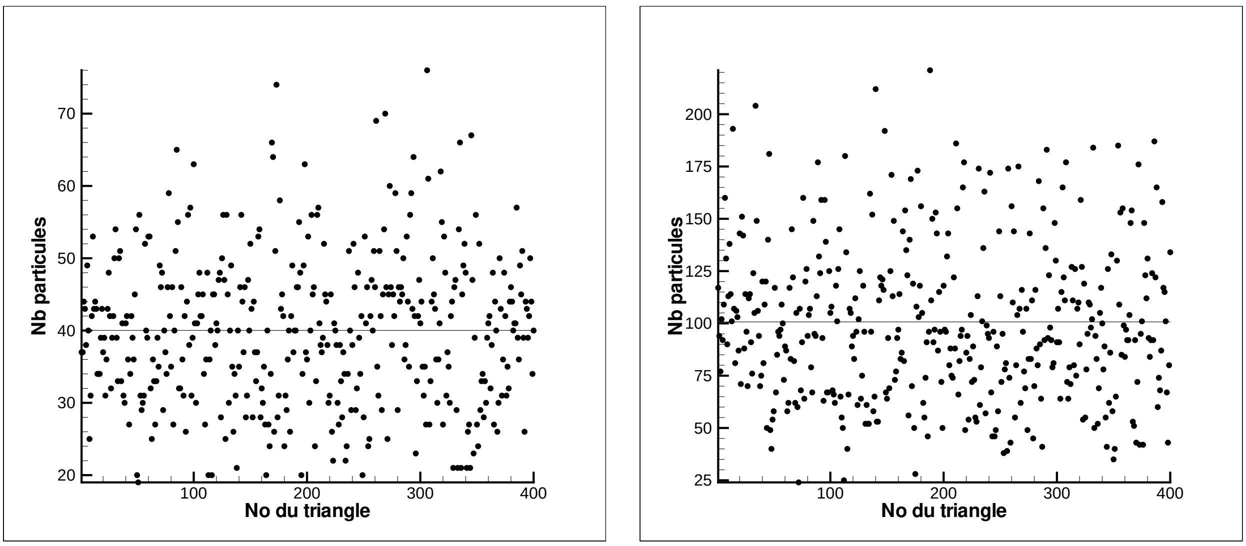


Figure 7.22: Nombre de particules par maille (maillage initial −, maillage perturbé •) - Cas 40 particules/maille (gauche) - Cas 100 particules/maille (droite)

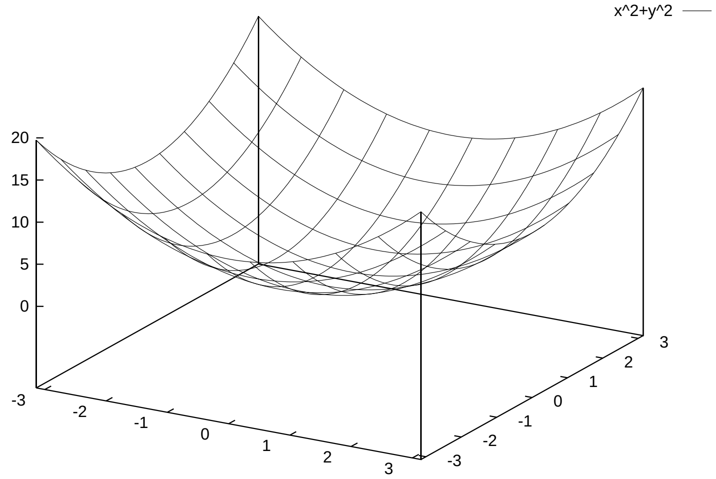


Figure 7.23: Fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$

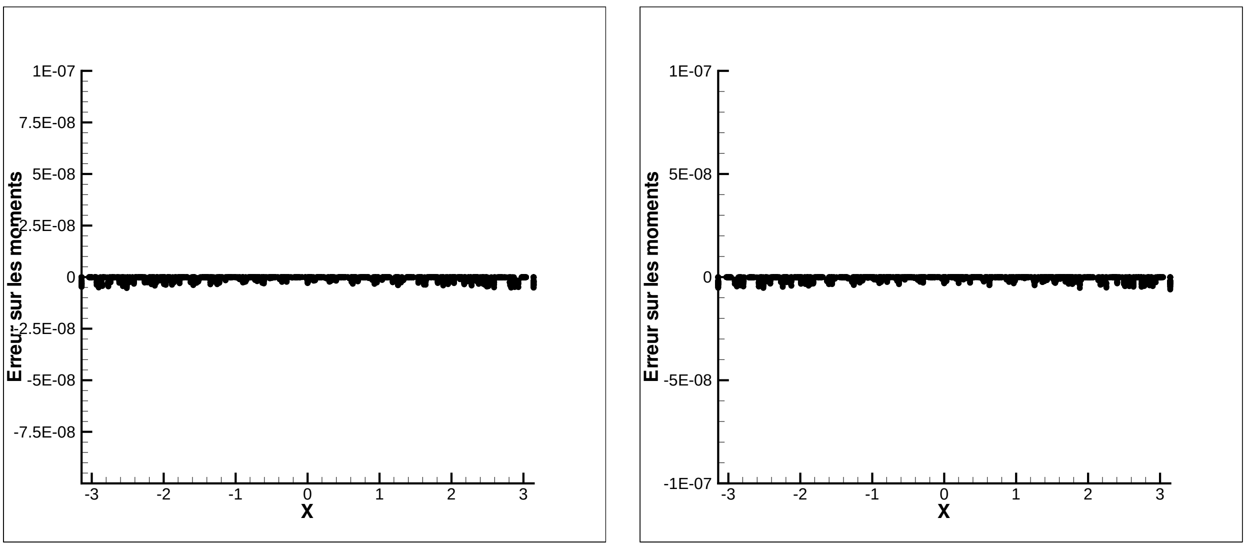


Figure 7.24: Erreur $(M_{f,\cdot} - M_{f,\cdot}^{ex})$ pour $f(x, y) = x^2 + y^2$ - Cas 40 particules/maille (gauche) - Cas 100 particules/maille (droite)

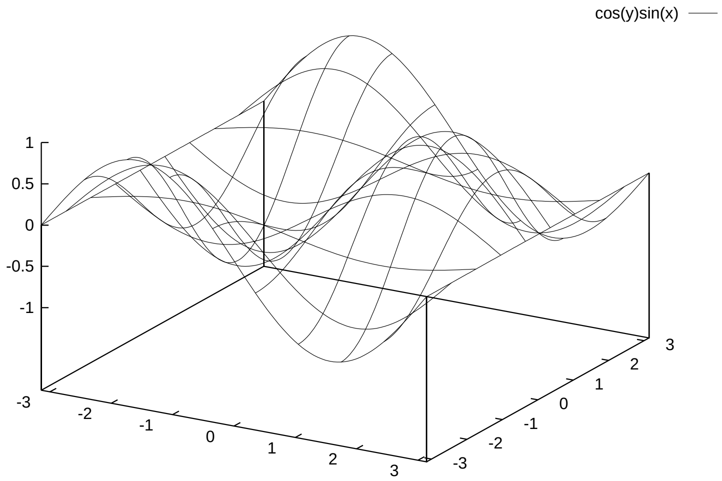


Figure 7.25: Fonction $f(x, y) = cos(y)sin(x)$

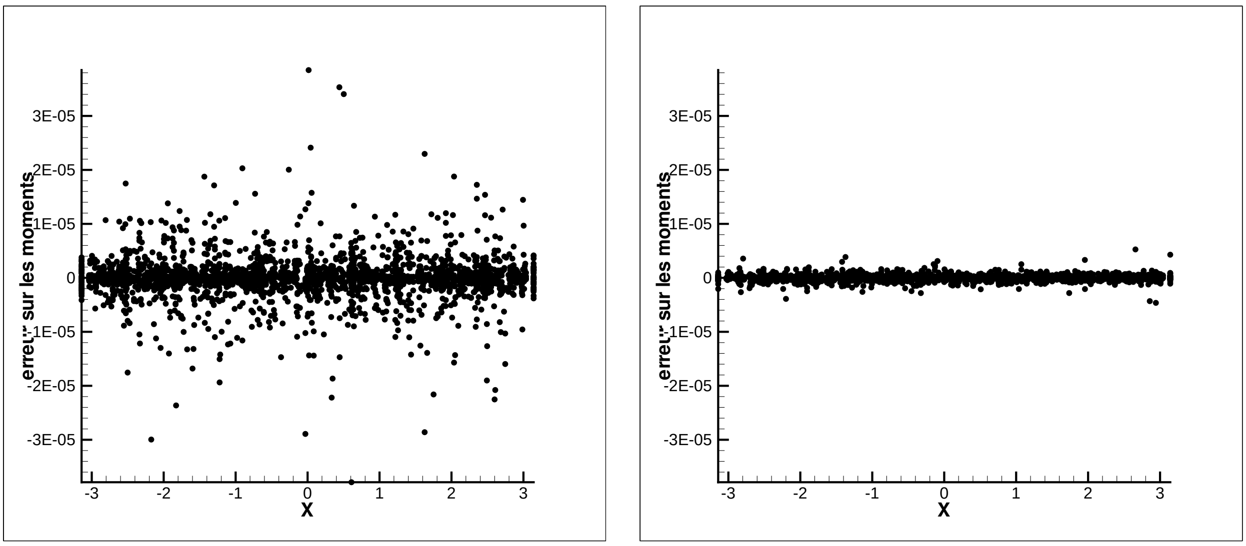


Figure 7.26: Erreur $(M_{f,\cdot} - M_{f,\cdot}^{ex})$ pour $f(x, y) = cos(y)sin(x)$ - Cas 40 particules/maille (gauche) - Cas 100 particules/maille (droite)

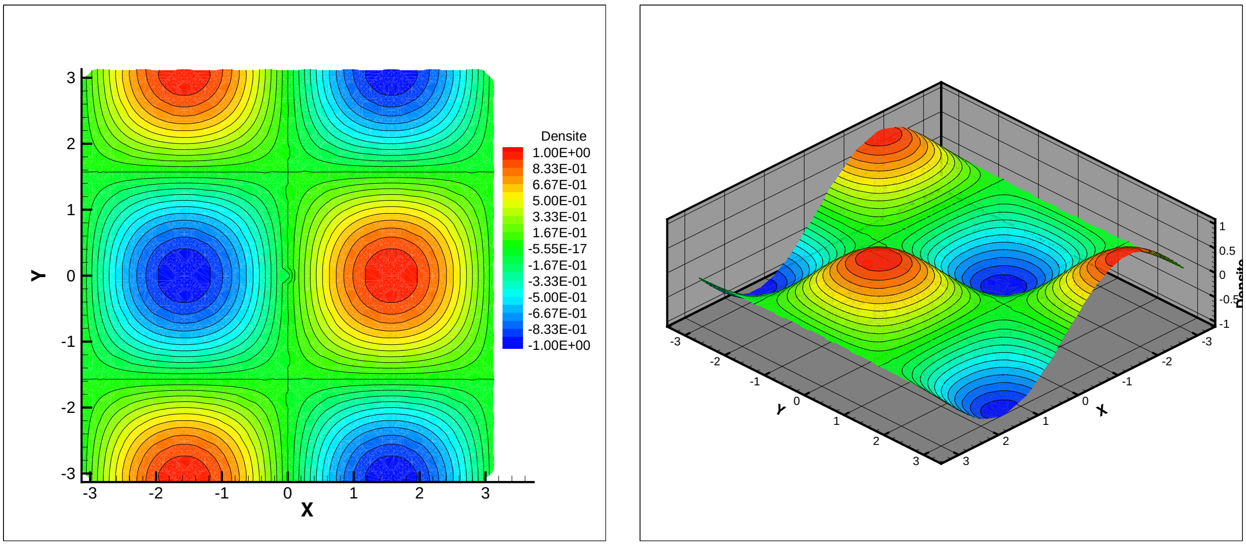


Figure 7.27: $f(x,y) = cos(y)sin(x)$ - Valeurs portées par les particules après remaillage (même courbe vue 2D et p3D la couleur et l'azimut sont redondantes)

La deuxième remarque concerne les poids des particules : le poids volume ω_p est le seul qui évolue lors du remaillage. Pour illustrer cela la figure 7.27 représente les poids f_p portés par les particules dans le cas $f(x,y) = cos(y)sin(x)$. Leur valeur est bien en adéquation avec la solution exacte donnée par la figure 7.25.

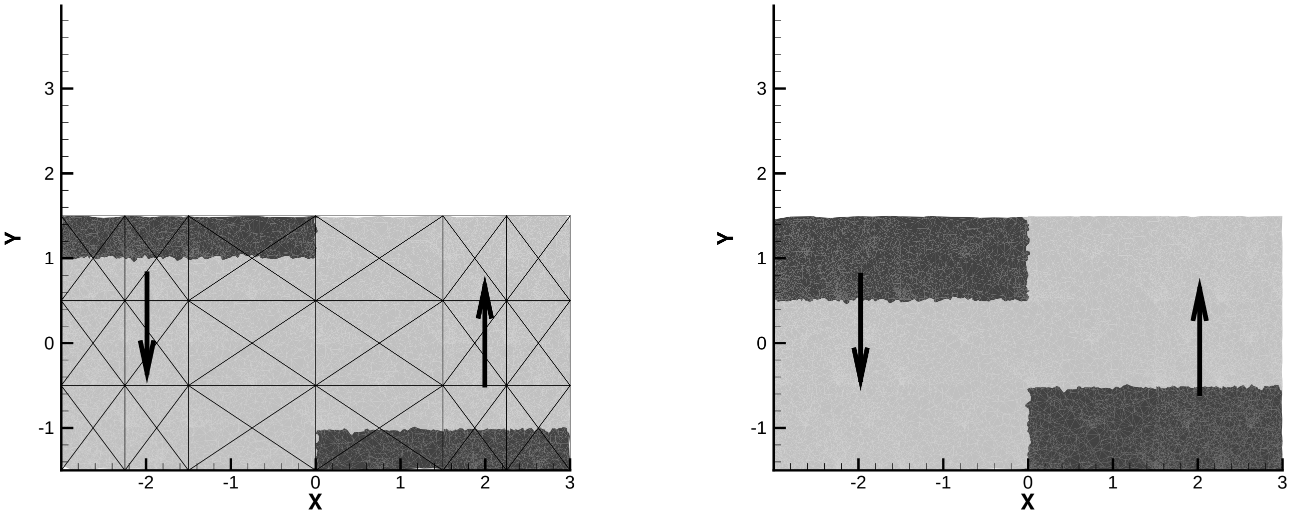
Afin de tester le processus de remaillage dans une configuration où un grand nombre de remaillages est nécessaire nous présentons les résultats sur un problème de ligne de glissement dans **7.2.2**.

7.2.2 Problème de glissement

Nous allons simuler un problème de glissement d'un fluide sur un autre. Il s'agit simplement de deux états distincts séparés par une discontinuité de contact. La vitesse de part et d'autre est de sens opposée et parallèle à la discontinuité. Ce type de test ne peut-être traité en Lagrange qu'avec des méthodes de type ALE ou Lagrange/projection car l'équation de continuité est violée.
Avec notre méthode, à chaque cycle on projette l'information sur une population de particules qui se meuvent dans le domaine de calcul puis on réinitialise le domaine de calcul avec le même maillage, et des particules qui ont changé de maille ou sont sorties du domaine ou bien sont entrées dans celui-ci. La question est de savoir si ce type de remaillage nous permet de préserver la discontinuité de contact et que le glissement des fluides les uns sur les autres ne génère pas de diffusion numérique.
Dans le domaine $\Omega = [-3;3] \times [-1.5;1.5]$ très grossièrement maillé (72 cellules, 53 nœuds) on considère les fluides

Fluide à Gauche	**Fluide à Droite**
$\rho_G = 1.0$	$\rho_D = 0.1$
$\vec{V}_G = (0.0, -1.0)^t$	$\vec{V}_D = (0.0, 1.0)^t$
$p = 1.0$	$p = 1.0$

l'axe $X = 0$ sépare les deux fluides. Les conditions aux limites sont de type fluide entrant au nord-ouest et sud-est, fluide sortant au nord-est et sud-ouest et de type mur à l'est et à l'ouest.



$T_1 = 0.05$ $T_2 = 0.1$

Figure 7.28: Glissement de deux fluides l'un sur l'autre - Position des particules entrantes (gris foncé) et présentes à l'instant initial (gris clair), les flèches indiquent le sens de déplacement des fluides.

On représente les positions des particules ; en gris foncé les particules entrant dans le domaine, en gris clair les particules initialement dans le domaine pour deux temps physiques $T_1 = 0.05$, $T_2 = 0.1$. Nous avons placé suffisamment de particules par maille pour ne pas être limité lors des remaillages successifs et pouvoir visualiser correctement l'avancée des fluides entrant (soit 50 particules par mailles). On observe sur les résultats numériques une avancée de fronts « accidentés ». Cela vient du fait que le logiciel de dessin trace une droite entre les positions des particules ; comme celles-ci sont initialisées aléatoirement dans le domaine, il n'y en a pas (peu) sur les arêtes des triangles, d'où la forme de la discontinuité au milieu du domaine. Pour la même raison l'injection de particules dans le domaine se fait compte tenu de celles qui sortent, et donc en fonction de l'aléa sur leur placement intial, d'où l'avancée de front accidenté. Evidemment on aurait pu placer judicieusement (mais de manière arbitraire) les particules pour observer des discontinuités en ligne droite... ce qui n'aurait rien changé à la précision de ce résultat.
A T_2 on a les valeurs suivantes sur les particules

	Fluide à Gauche	**Fluide à Droite**
ρ_{min}	0.99994296	0.0999854
ρ_{max}	1.00008964	0.10001173
ρ_{ex}	1.0	0.1

indiquant qu'il n'existe pas de diffusion entre les fluides. Cela montre au moins numériquement que la méthode pourrait être utilisée pour simuler des situations plus complexes de glissement, de refermement de cavités ou encore d'impacts de fluides par exemple.

7.3 Discussion

Ces différents cas test, même s'ils sont loin d'être exhaustifs, prouvent que la méthode se comporte bien en 2D pour des maillages non-structurés.
En particulier nous avons vu que la cylindricité des solutions est conservée même lorsque la compression est due à une onde de choc. La méthode rend bien compte de la propagation d'ondes de choc, de discontinuité de contact et d'onde de détente, et cela sans que des oscillations parasites ne viennent polluer la solution numérique de manière radicale.
La stabilité de la méthode est attestée par le fait qu'aucun remaillage n'a été nécessaire même dans des cas relativement sévères où la compression était importante. Cependant nous avons vu, avec le cas de glissement, que s'il devient nécessaire de remailler le domaine, alors la méthode particulaire développée réalise bien cette phase. De plus il suffit qu'il y ait suffisamment de particules par maille pour que la précision avec laquelle on remaille soit en adéquation avec la précision du schéma numérique.

Chapter 8

Application à la physique de l'interaction laser/plasma

Depuis les années 50 les scientifiques envisagent de provoquer des réactions de fusion très exothermiques d'atomes légers (hydrogène et hélium principalement) qui se déroulent au sein des étoiles. Les contrôler permettrait d'en utiliser la formidable énergie. Cette énergie entre dans le domaine des sources d'énergie alternatives telles la géothermie, l'énergie éolienne, solaire ...
La difficulté est d'initier les réactions de fusion, il faut en effet apporter une très grande quantité d'énergie. Les températures atteintes par le combustible sont telles que celui-ci se trouve à l'état d'un plasma tendant à se disperser. Pour empêcher cette dispersion les scientifiques envisagent de communiquer une accélération à une cible de matériaux fusibles par l'intermédiaire d'une onde laser de très forte puissance ; c'est la fusion par confinement inertiel (FCI). Le CEA est impliqué dans ces recherches avec la construction de la Ligne d'Intégration Laser (LIL) et à terme le Laser MégaJoules (LMJ) sur le site du CESTA.

La principale réaction de fusion que l'on cherche à exploiter est :

$$D + T \longrightarrow n +^4 He + 17.6MeV.$$

Un grand nombre d'une telle réaction se produit dans un plasma thermonucléaire caractérisé par deux paramètres fondamentaux :

- la température ionique du plasma ;
- le confinement mesuré par le produit entre la densité des ions et le temps de vie du plasma.

Pour une température ionique de $25keV$ le taux de réaction du deutérium-tritium est maximal ; l'auto-entretien du chauffage du milieu fusible par les réactions de fusion requiert le confinement du plasma pendant un temps au moins égal à $10^{14}/n_i$ seconde, avec n_i la densité volumique d'ions en cm^{-3}. Cette valeur peut être obtenue avec des plasmas très différents : à faible densité mais avec une durée de vie très longue ou bien à très haute densité et une durée de vie très courte. Ces dernières conditions sont celles du **confinement inertiel**.
La source d'énergie est un laser, la cible prend la forme d'une sphère de matériau fusible. Lorsqu'un ensemble de faisceaux lasers est dirigé vers la cible, on parle d'**attaque directe**. *A contrario* lorsque les lasers sont utilisés pour chauffer les parois d'une cavité formant un four pour y créer un rayonnement X thermique, on parle d'**attaque indirecte**. Dans l'attaque indirecte c'est la pression électromagnétique de ces rayons X qui met en mouvement la cible. Un ensemble de phénomènes physiques complexes naissent, interagissent sans qu'il soit toujours possible de les observer expérimentalement. La simulation numérique devient alors un outil nécessaire. Dans ce cadre de nombreuses expériences à venir nécessitent l'appui de codes de calcul performant qui rendent compte avec précision de la physique sous-jacente de l'interaction des lasers avec les plasmas.

Décrivons brièvement dans une première partie quelques concepts et grandeurs en physique des plasmas. Loin d'être exhaustive cette introduction permettra ensuite de mettre en évidence un certain nombre de phénomènes à prendre en compte sous la forme de termes sources dans la modélisation (voir pour plus de détails [31], [32], [15], [12]). Une troisième partie présentera les calculs de validation en 1D et 2D.

8.1 Introduction à la physique de l'interaction laser/plasma

Un plasma est un milieu comportant des ions et des électrons en nombre tel que la neutralité électrique globale soit assurée. Ce milieu est soumis à deux tendances contradictoires : une tendance à l'éclatement sous l'effet de la pression thermique, une tendance à l'organisation due à l'aspect collectif de l'interaction coulombienne.
Les deux populations réagissent très différemment aux excitations du fait de leur grand écart de masse. Le rapport m/Z qui caractérise la dynamique d'une particule chargée dans un champ électromagnétique est toujours au moins 2000 fois supérieur pour un ion que pour un électron.
De ce fait une excitation haute fréquence met les électrons en mouvement sans que les ions n'aient le temps de réagir : la dynamique du plasma est alors déterminé par celle des électrons. Par contre les ions répondront à une excitation basse fréquence alors que l'inertie des électrons pourra être négligée, ils rejoignent instantanément leur position d'équilibre, la dynamique du plasma est alors donnée par celle de la population ionique. Chaque espèce est considérée comme un fluide chargé et les équations les décrivant sont les équations de la dynamique des gaz. L'existence d'ondes dans un plasma résulte de l'interaction entre le mouvement des particules et la propagation du champ. Trois types d'ondes sont à considérer :
• les ondes de Langmuir ou ondes plasma sont des ondes longitudinales haute fréquence faisant intervenir les électrons ; les ions sont quasi immobiles ;
• les ondes sonores sont longitudinales et font intervenir la réponse ionique ; les électrons suivent le mouvement des ions du fait de leur faible inertie ;
• les ondes électromagnétiques sont transverses et telles que la vitesse de phase dépasse la célérité de la lumière. On associe à une fréquence d'ondes électromagnétiques une densité critique n_c telle que si la densité des électrons lui est supérieure alors le milieu est réfléchissant à cette fréquence. Si λ en μm est la longueur d'onde on a $n_c = 10^{21}/\lambda^2$ en cm^{-3}. A cette dynamique on associe la vitesse caractéristique c_s appelée vitesse acoustique-ionique $c_s = \sqrt{\frac{ZkT_e}{m_i}}$, où T_e est la température électronique en keV, m_i la masse des ions, Z le numéro atomique, k la constante de Boltzmann. Il s'agit de la vitesse de propagation d'une onde acoustique (dans un plasma) dont le vecteur n'est pas les collisions comme dans un gaz neutre, mais la pression électronique thermique qui fait bouger les ions par l'attraction électrique électrons/ions.

Soit une particule chargée plongée dans un champ électromagnétique oscillant à haute fréquence, son mouvement est oscillant de même pulsation que le champ. Supposons maintenant que l'amplitude de ce champ soit inhomogène, le retour d'une oscillation ne compense pas exactement l'aller et la somme de ces petites fluctuations se traduit par une accélération de la particule. La particule semble alors subir l'action d'une force dîte **force pondéromotrice** qui a pour effet d'expulser la matière des zones de fort champ.

Notre but est d'inclure cette force de pression électromagnétique comme terme source dans le système de la dynamique des gaz et de la résoudre à l'aide de la méthode présentée. Ce faisant nous serons en mesure de calculer une approximation de la réponse du plasma à la présence du champ E.

8.2 Modélisation et traitement des termes sources

Soient les quantités physiques suivantes :

m_e	:	masse de l'électron	$= 9,1091.10^{-31}$ kg
c	:	vitesse de la lumière dans le vide	$= 2,997925.10^{8}$ m/s
$\overline{e}$	:	charge de l'électron	$= 1,60210.10^{-19}$ C
ϵ_0	:	permitivité du vide	$= 8,854.10^{-12}$ F/m
w_0	:	pulsation propre du laser	
n_c	:	densité critique	$= (m_e w_0^2 \epsilon_0)/\overline{e}^2$
E	:	champ électromagnétique	
v_e	:	vitesse des électrons	

La force pondéromotrice est homogène au gradient d'une densité volumique d'énergie cinétique d'oscillation moyennée en temps. Elle se trouve dans l'équation de la quantité de mouvement sous la forme

$$\rho(X,t)\overrightarrow{\nabla_X \left(\frac{m_e}{m_i} \frac{v_e^2(X,t)}{4} \right)}, \tag{8.1}$$

avec

$$v_e = \frac{\overline{e}}{m_e w_0} E(X,t). \tag{8.2}$$

D'où la force pondéromotrice en 1D

$$\rho(X,t)\partial_X \left(\frac{m_e}{m_i} \frac{1}{4} \frac{\overline{e}^2 E^2(X,t)}{m_e^2 w_0^2} \right) = \left(\frac{\overline{e}}{m_e w_0} \right)^2 \frac{m_e}{m_i} \rho(X,t) \partial_X \left(\frac{1}{4} E^2(X,t) \right). \tag{8.3}$$

Considérons les équations de l'hydrodynamique en variables d'Euler avec le terme source

$$\partial_t(UJ) + J\partial_X F(U) = S \tag{8.4}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ -K\rho\partial_X(\frac{E^2}{4}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{8.5}$$

il s'agit du système à résoudre. Notons $\mathcal{I}_{i+1/2}$ la maille en coordonnées d'Euler (l'image de la maille lagrangienne $I_{i+1/2}$ dans la transformation dont le jacobien est J). Le champ E est supposé régulier, par définition les moments de la force pondéromotrice sont alors donnés par

$$\begin{aligned}
M_{S,k} &= \frac{K}{4} \int_{\mathcal{I}_{i+1/2}} \rho \partial_X(E^2) \sigma_k dX & (8.6)\\
&\overset{\text{transf.}}{=} \frac{K}{4} \int_{I_{i+1/2}} \rho \partial_X(E^2) \sigma_k (J d\xi) & (8.7)\\
&= \frac{K}{4} \int_{I_{i+1/2}} \rho \left(J \partial_X(E^2) \right) \sigma_k d\xi & (8.8)\\
&= \frac{K}{4} \int_{I_{i+1/2}} \rho \left(\partial_\xi(E^2) \right) \sigma_k d\xi & (8.9)\\
&= \frac{K}{2} \int_{I_{i+1/2}} \rho E \partial_\xi E \sigma_k d\xi, & (8.10)
\end{aligned}$$

où K est une constante dépendant de l'adimentionnement choisi et des paramètres physiques. Si on suppose $E \in \mathbb{P}_n(I_{i+1/2})$ alors

$$E(\xi) = \sum_{i=0}^{n} E_i \sigma_i(\xi) \tag{8.11}$$

$$M_{S,k} \simeq \frac{K}{2} \sum_{i,j,l=0}^{n} \widehat{\rho}_i E_j E_l \int_{I_{i+1/2}} \sigma_i \sigma_j \partial_\xi(\sigma_l) \sigma_k d\xi. \tag{8.12}$$

Comme le champ E est susceptible de provenir de différentes sources (calcul analytique, loi tabulée, code de calcul...) nous n'avons envisagé qu'un traitement explicite de celui-ci. Cela signifie que quelque soit le nombre de cycle de la méthode de Runge-Kutta E est évalué au début du cycle. La densité est approchée par sa valeur (n)-diffusée de la même manière que dans le calcul des termes intérieurs et des termes de bords.
En ce qui concerne le 2D, on calcule les moments de la force pondéromotrice avec les mêmes outils que ceux qui précèdent, le gradient générant un terme pour l'équation $U = \rho u$, un terme pour $U = \rho v$.

8.3 *Scenarii* physiques et simulations numériques

Soit un plasma éclairé par un champ électromagnétique fixe, l'évolution du plasma n'a donc pas d'influence sur les caractéristiques de l'onde. Ce cas correspond à la situation de la surface d'un plasma par où entre le faisceau laser. Le champ est tel que la distribution d'énergie est une gaussienne centrée en $X = 0$

$$\widetilde{E} = a_0 e^{-\left(\frac{X}{w_0}\right)^2} = a_0 f(X), \tag{8.13}$$

a_0 et w_0 sont des constantes, le potentiel pondéromoteur est gaussien lui aussi

$$\widetilde{\Phi_p} = \frac{a_0^2}{4} e^{-2\left(\frac{X}{w_0}\right)^2}. \tag{8.14}$$

Dans le cas faiblement non linéaire ($a_0/\tilde{v}_{te} < 0.05$) il est possible de donner qualitativement la solution de (8.4). La réaction d'un plasma immobile à un tel point chaud consiste en un creusement du plasma à l'endroit du point chaud et à l'expulsion de la matière sous la forme de deux ondes solitaires à la vitesse acoustique-ionique (voir le cas 8.3.1a). Lorsque le plasma est animé d'une vitesse de dérive, un déplacement en bloc du plasma, deux ondes d'inégales hauteurs se propagent à la vitesse acoustique-ionique plus ou moins la vitesse de dérive (voir le cas 8.3.2). La solution 1D sans dérive et sans amortissement est donnée par une fluctuation de densité telle que

$$\frac{\delta n}{n}(X,t) = \left(\frac{1}{2}\frac{a_0}{\tilde{v}_{te}}\right)^2 \left[-f(X) + \frac{1}{2}\left(f(X - c_s t) + f(X + c_s t)\right)\right], \tag{8.15}$$

l'état stationnaire est mesuré par

$$\frac{\delta n}{n}(X) = -\left(\frac{1}{2}\frac{a_0}{\tilde{v}_{te}}\right)^2 f(X). \tag{8.16}$$

Dans le cas où une vitesse de dérive v_d est appliquée à tout le plasma la fluctuation de densité est donnée par ($v_\pm = c_s \pm v_d$)

$$\frac{\delta n}{n}(X,t) = \left(\frac{1}{2}\frac{a_0}{\tilde{v}_{te}}\right)^2 \left[-\frac{f(X)}{\frac{v_+ v_-}{c_s^2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{f(X - v_+ t)}{\frac{v_+}{c_s}} + \frac{f(X + v_- t)}{\frac{v_-}{c_s}}\right)\right], \tag{8.17}$$

pour le cas particulier $v_d = c_s$ il y a une croissance linéaire en temps de δn.
Dans le cas non linéaire ($a_0/\tilde{v}_{te} > 0.05$) il devient plus difficile d'anticiper la solution . Cependant les ondes

solitaires étant des chocs électrostatiques on est capable de donner leur évolution (voir [21]) :
• un choc électrostatique peut rester identique à lui même et une fois passé le plasma revient au repos ;
• il peut se briser en multiples oscillations qui sont autant d'ondes solitaires (voir le cas 8.3.1b) ;
• il peut « déferler » lorsque son nombre de mach est supérieur à un nombre de mach critique. Dans ce cas les hypothèses considérées sont violées, on perd la cohérence du système.

Le schéma numérique est construit à partir de paraboles par mailles sans limiteur. On représente toujours la fluctuation de la moyenne de la densité par maille $(\rho_{init} - \rho)/\rho_{init}$. La distance est adimentionnée à c/w_0, le temps à w_0^{-1}, la vitesse à la vitesse de la lumière, la densité à la densité critique.

8.3.1 Perturbation d'un plasma immobile sous l'effet d'un point chaud fixe

a) Cas faiblement non linéaire : $a_0 = 0.05$

Le plasma est initialisé par

	Plasma		
ρ	183.6	$\Longrightarrow$	$n_i = 0.1$
u	0		
T_i	0	$\Longrightarrow$	$p_i = 0$
$\frac{kT_e}{m_e c^2}$	3	$\Longrightarrow$	$p = p_e = n_e k T_e$

sur un domaine $\Omega = [0, 512]$ maillé par 128 cellules uniformes. Les conditions aux limites sont de type périodique[1]. On trace l'évolution de la fluctuation de densité aux temps $T_1 = 8.10^2$, $T_2 = 8.10^3$, $T_3 = 4.10^4$, $T_4 = 8.10^4$. Le champ électromagnétique est initialisé par $a_0 = 0.05$ et $w_0 = 30$.

Comme les non linéarités sont faibles il est possible de prédire l'état stationnaire voir (8.16) ainsi que les vitesses de propagation des ondes et leur forme. Les « bosses » se déplacent à la vitesse acoustique-ionique $(\pm c_s)$, et transportent une moitié chacune de la matière ôtée du point chaud. Ces résultats sont bien rendus par les courbes de la figure 8.1 pour la fluctuation de densité et 8.2 pour la vitesse.

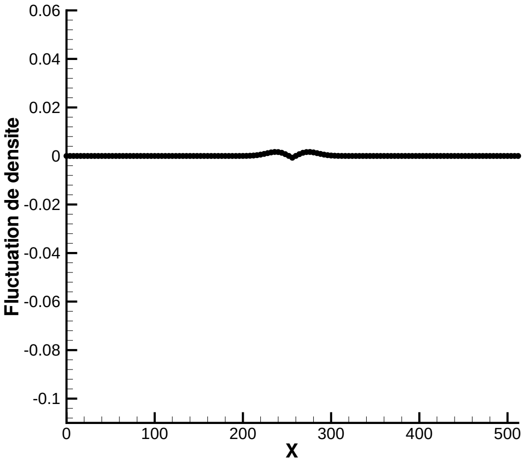
b) Cas fortement non linéaire : $a_0 = 0.155$

La situation est la même qu'en **(a)** avec un maillage à 200 mailles et un champ plus intense : $a_0 = 0.155$ à $T_1 = 4.10^2$, $T_2 = 2.10^3$, $T_3 = 4.10^4$, $T_4 = 8.10^5$. Aucune solution exacte n'est disponible mais on retrouve les prédictions (brisure en multiples oscillations **physiques** voir les figures 8.3 et 8.4).

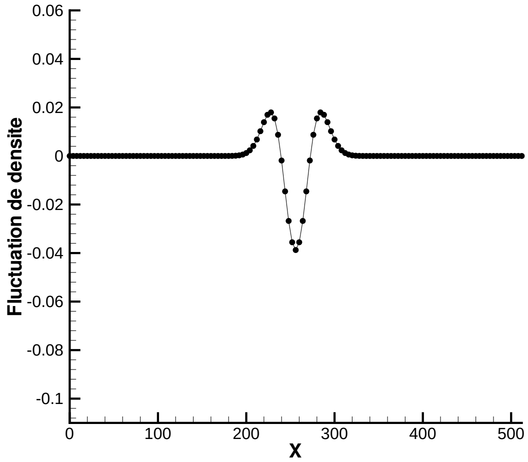
8.3.2 Perturbation d'un plasma dérivant

On initialise le système comme en 8.3.1 a), mais le plasma est animé d'une vitesse de dérive, c'est-à-dire $u = v_d \neq 0$. La même structure de solution est prédîte, les bosses ayant des tailles et des vitesses différentes,

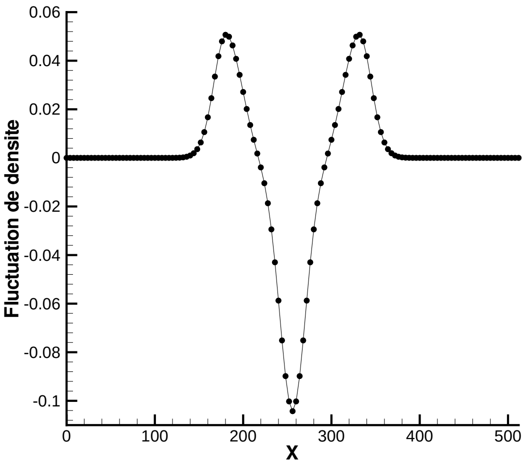
[1]CL de type périodique : une maille fantôme est ajoutée à chaque bord du domaine et en fin de cycle on impose que les données dans cette maille soient celles de la maille physique la plus éloignée.



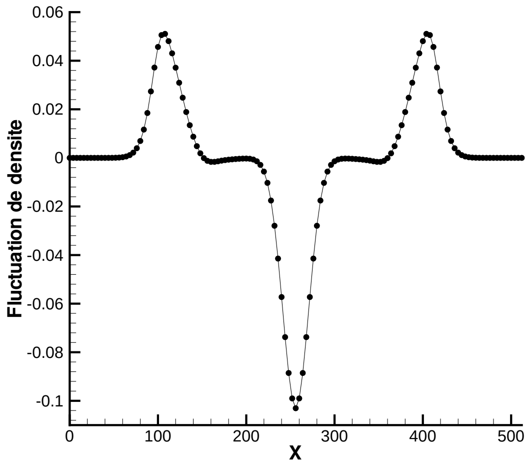
Densité à $T_1 = 8.10^2$



Densité à $T_2 = 8.10^3$

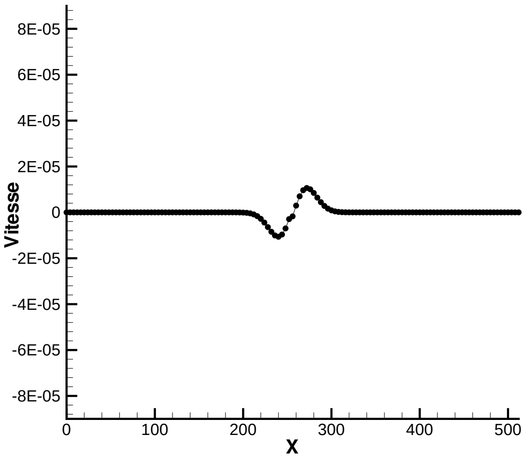


Densité à $T_3 = 4.10^4$

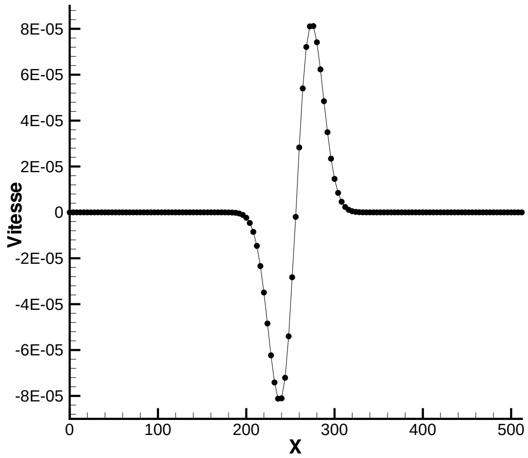


Densité à $T_4 = 8.10^4$

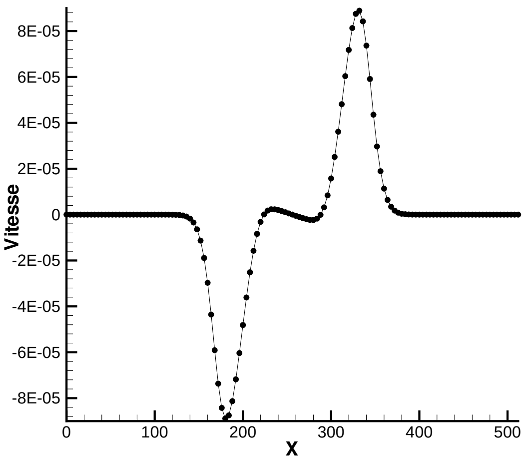
Figure 8.1: Perturbation d'un plasma immobile - Densité pour T_i - a) Cas faiblement non linéaire



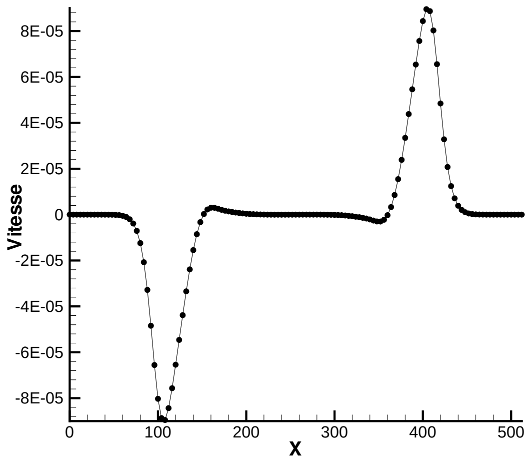
Vitesse à $T_1 = 8.10^2$



Vitesse à $T_2 = 8.10^3$

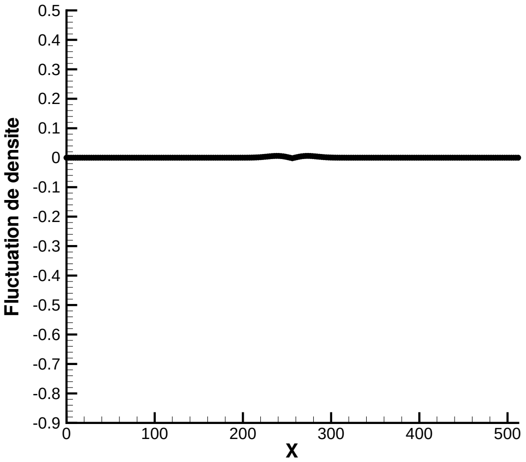


Vitesse à $T_3 = 4.10^4$

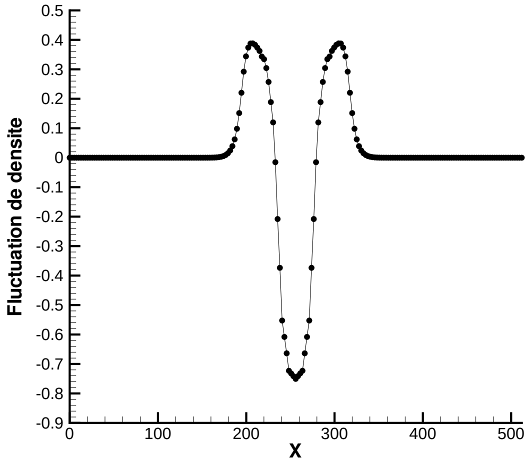


Vitesse à $T_4 = 8.10^4$

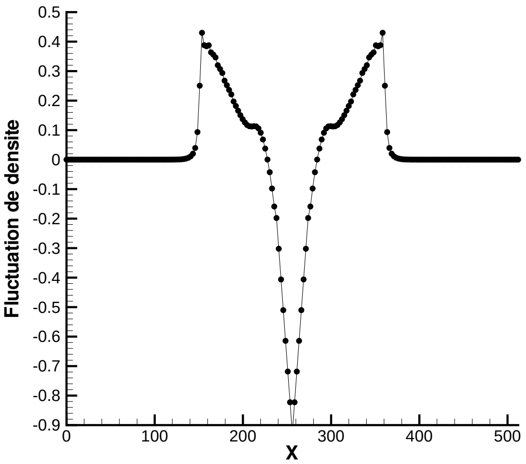
Figure 8.2: Perturbation d'un plasma immobile - Vitesse pour T_i - a) Cas faiblement non linéaire



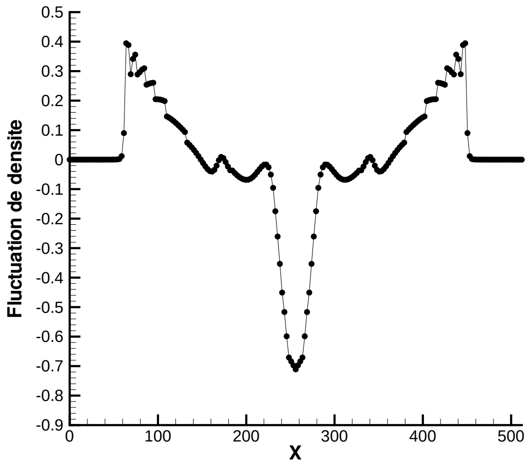
Densité à $T_1 = 8.10^2$



Densité à $T_2 = 8.10^3$

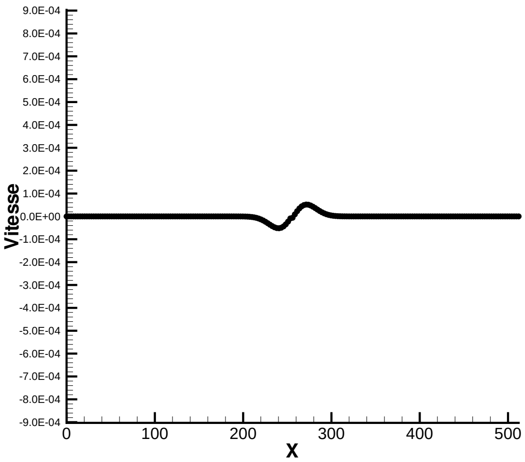


Densité à $T_3 = 4.10^4$

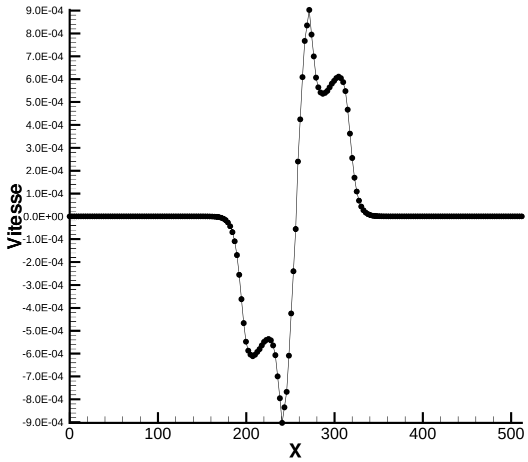


Densité à $T_4 = 8.10^4$

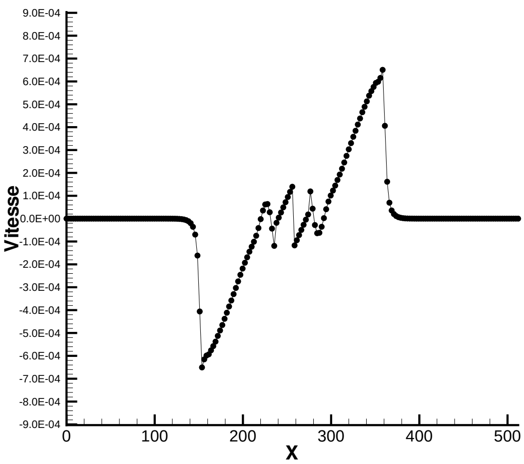
Figure 8.3: Perturbation d'un plasma immobile - Densité pour T_i - b) Cas fortement non linéaire



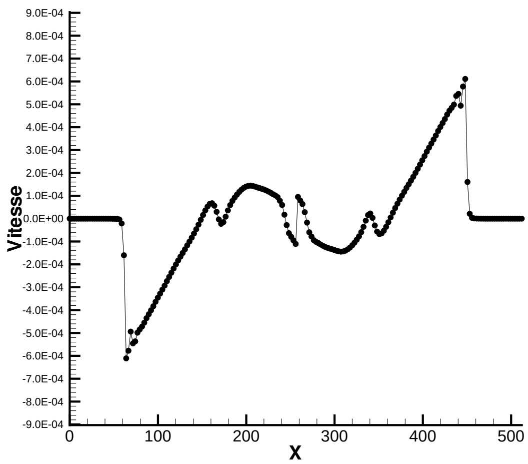
Vitesse à $T_1 = 8.10^2$



Vitesse à $T_2 = 8.10^3$



Vitesse à $T_3 = 4.10^4$



Vitesse à $T_4 = 8.10^4$

Figure 8.4: Perturbation d'un plasma immobile - Vitesse pour T_i - b) Cas fortement non linéaire

elles se déplacent à $c_s \pm v_d$.
Dans la figure 8.5 en haut la vitesse de dérive est faible $v_d = 0.2c_s$ et les bosses ne sont que faiblement perturbées. Par contre lorsque la vitesse de dérive augmente $v_d = c_s$, les perturbations sont plus importantes (voir la figure 8.5, les courbes du bas).

8.3.3 Perturbation d'un plasma en géométrie 2D

Perturbation d'un plasma immobile sous l'effet d'un point chaud

En deux dimensions d'espace nous allons simuler la perturbation d'un plasma sous l'effet d'un point chaud fixe dans le cas faiblement non linéaire. Le domaine de calcul est $\Omega = [0, 512] \times [0, 512]$, le maillage est composé de 1558 mailles (875 nœuds), aucun remaillage n'a été nécessaire. Les conditions aux limites sont toujours de type périodique. La force pondéromotrice et le plasma sont initialisés comme en 8.3.1.
Cette situation va engendrer comme en 1D un trou de densité au centre du domaine. La matière expulsée va se retrouver cette fois-ci, sous la forme d'une onde cylindrique se propageant en direction centrifuge. C'est ce que l'on observe sur la figure 8.6 qui représente une évolution de la fluctuation de densité pour quatre temps physiques $T_1 = 8.10^2$, $T_2 = 8.10^3$, $T_3 = 4.10^4$, $T_4 = 8.10^4$.
Notons que l'effet bidimensionnel a une influence sur la forme des bosses qui ne sont plus des quasi-gaussiennes.

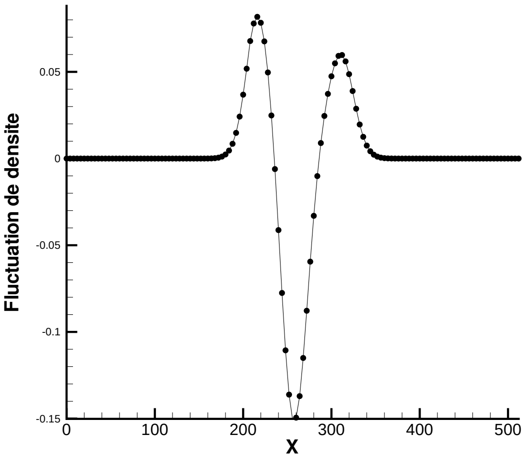
Perturbation d'un plasma immobile sous l'effet de deux points chauds

Plaçons deux points chauds dans un domaine de calcul $\Omega = [0, 512] \times [0, 512]$. Ces deux points chauds vont générer deux perturbations similaires à celle observée dans le cas 8.3.3. Cependant ces fluctuations de densité vont interagir après un certain temps ; c'est ce que l'on observe dans les courbes des figures 8.7 et 8.8. Ce cas test correspond aux types de simulations qui vont être réalisées par les physiciens des plasmas. A une échelle plus grande, une tache focale de laser engendre un grand nombre de *speckles* qui interagissent les uns avec les autres, accentuant les trous, renforçant les bosses, ou encore se neutralisant mutuellement.
L'intérêt est d'éviter les associations de nombreux *speckles* qui pourraient devenir destructrices pour la propagation et le pointage du laser, et finalement pour la qualité du dépot d'énergie réalisé par celui-ci.

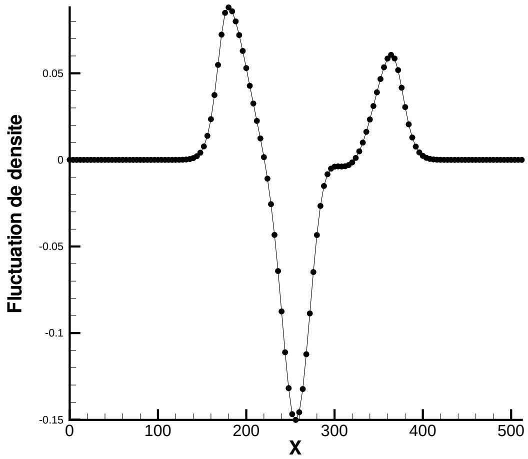
Les résultats sont portés dans les figures 8.7 et 8.8 qui montrent à la fois les associations constructives et destructives des perturbations du plasma.

8.4 Discussion

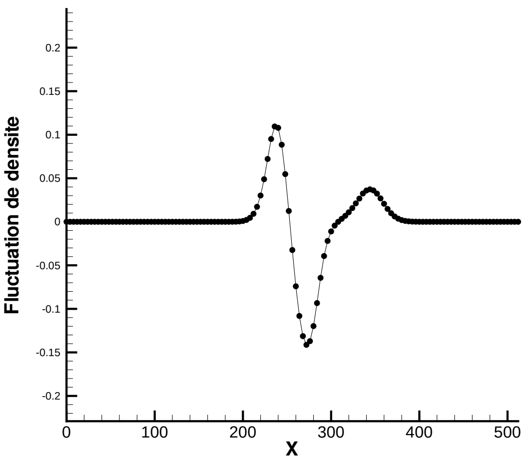
L'interaction laser/plasma est une application possible de la méthode particulaire lagrangienne présentée. En effet, ce domaine de la physique théorique nécessite de plus en plus l'intervention de codes de calcul. Ceux-ci doivent être particulièrement précis pour ces applications, car des phénomènes d'oscillations physiques et de brisures d'états continus peuvent apparaître.
Capter de tels phénomènes n'est pas une chose aisée lorsque la méthode numérique n'est pas assez précise, et c'est totalement irréaliste si la méthode présente des oscillations numériques. En effet ces oscillations numériques mélées aux oscillations physiques anéantissent généralement la pertinence du résultat. En ce qui concerne notre méthode nous avons vu que la précision et la stabilité, acquises conjointement, permettaient de traiter ce type de problème dans de bonnes conditions.



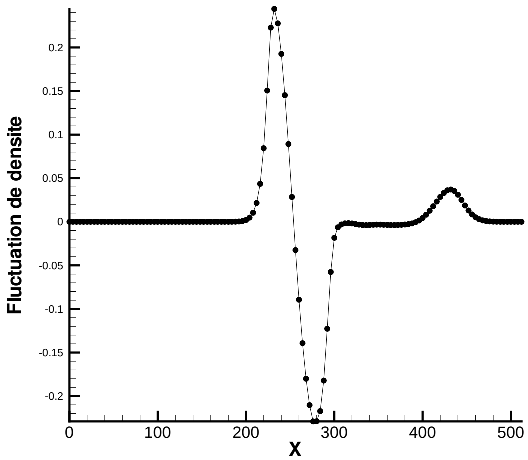
Densité à $T_1 = 24.10^3$



Densité à $T_2 = 48.10^3$

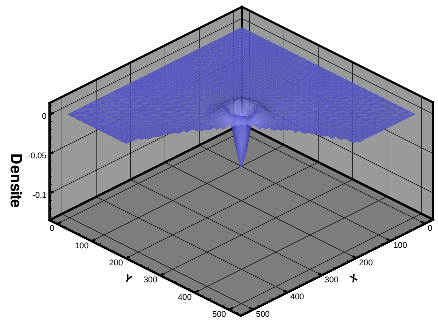


Densité à $T_1 = 24.10^3$

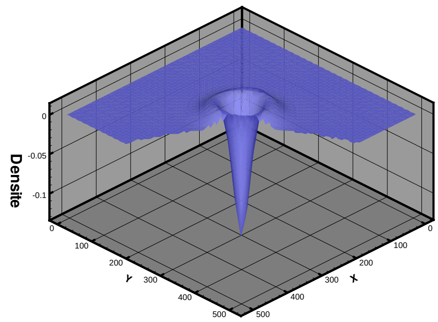


Densité à $T_2 = 48.10^3$

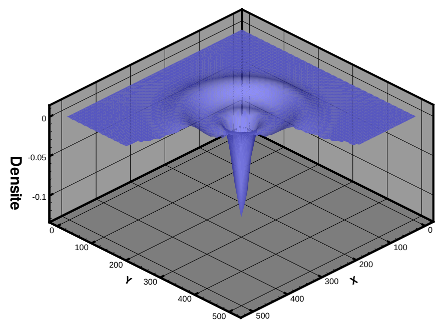
Figure 8.5: Perturbation d'un plasma dérivant - $v_d = 0.2c_s$ (haut) - $v_d = c_s$ (bas)



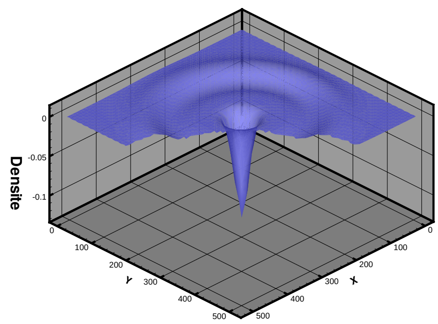
Densité à $T_1 = 24.10^3$



Densité à $T_2 = 48.10^3$



Densité à $T_1 = 24.10^3$



Densité à $T_2 = 48.10^3$

Figure 8.6: Perturbation d'un plasma immobile en 2D - Densité pour T_i, $i = 1, 2, 3, 4$

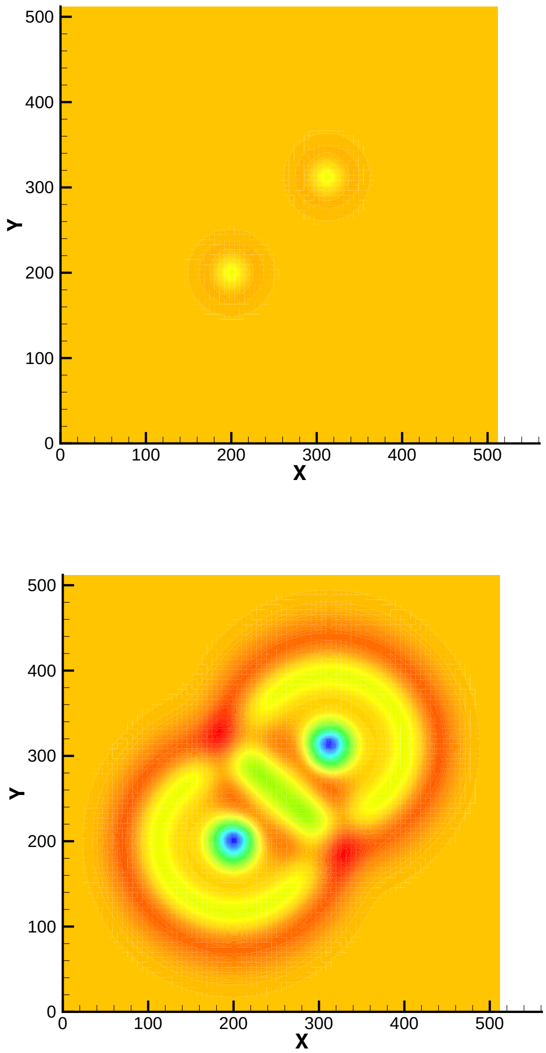


Figure 8.7: Perturbation d'un plasma immobile en 2D pour deux points chauds - Densité ionique - Echelle de couleur du bleu ($\rho^n < \rho^0$), au jaune (ρ^0), au rouge ($\rho^n > \rho^0$)

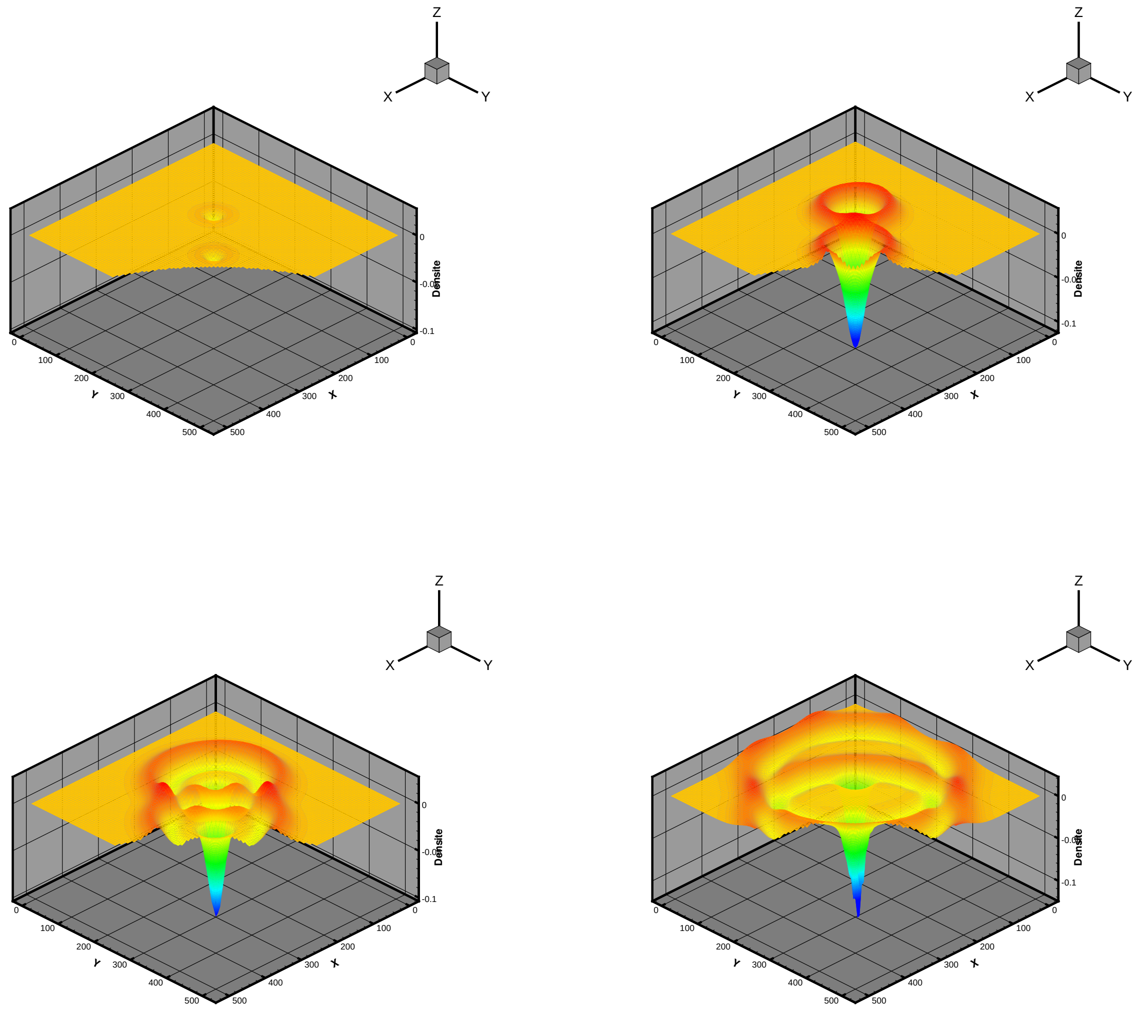


Figure 8.8: Perturbation d'un plasma immobile en 2D pour deux points chauds - Densité ionique - Echelle de couleur du bleu ($\rho^n < \rho^0$), au jaune (ρ^0), au rouge ($\rho^n > \rho^0$) - La couleur et l'azimut sont redondantes

L'avenir d'une telle méthode pour ce type de problème est le couplage avec un code de simulation de la propagation de faisceaux lasers. En effet le faisceau laser est perturbé par la présence des fluctuations de densité du plasma. Le plasma est quant à lui perturbé par les fluctuations du champ électromagnétique (la force pondéromotrice). C'est ce couplage qui présente un intérêt pour de véritables simulations numériques proches de la physique. Le code de résolution de l'hydrodynamique rend une carte de densité qui sert à incrémenter le champ par le code de propagation. Par la suite, le code de propagation rend au code hydrodynamique le champ incrémenté (donc une force pondéromotrice) qui sert à faire évoluer les variables hydrodynamiques du plasma, sa densité en particulier.

Chapter 9

Conclusion

Une partie de la mécanique des fluides est décrite par les équations de la dynamique des gaz. Ces équations peuvent s'exprimer de manière équivalente par rapport à deux référentiels ; l'un fixe (variables d'Euler), l'autre en mouvement avec le fluide (variables de Lagrange). Comme ces deux formulations semblent « aussi naturelles » l'une que l'autre, on pourrait croire que leur propriétés mathématiques sont identiques. Il est connu depuis de nombreuses années que le système de la dynamiques des gaz en variables d'Euler est hyperbolique. Cependant nous avons vu que ce système en formulation lagrangienne, en dimension d'espace supérieure ou égale à 2, n'est que faiblement hyperbolique[1]. Bien que toutes les valeurs propres du système complet soient réelles, il n'existe pas de base de vecteurs propres : le système complet n'est pas diagonalisable. Toute formulation intermédiaire entre Euler et Lagrange mène pourtant à un système diagonalisable. Seule la formulation lagrangienne pure possède cette particularité, cependant si on construit une méthode numérique ne nécessitant pas de décomposition sur une base de vecteurs propres, alors ce défaut n'est pas préjudiciable à la méthode numérique.

Une méthode lagrangienne permet notamment, si elle est suffisamment stable, d'effectuer un raffinement et déraffinement adaptatif du maillage en fonction de l'écoulement. Elle ne calcule pas de termes de convection de maille à maille, et seule la matière est maillée. De plus on observe généralement une relative souplesse pour les conditions aux limites. Cependant l'exploitation en multidimension de méthodes lagrangiennes présente un certain nombre de défauts en pratique. En premier lieu, un écoulement avec de fortes déformations engendre un maillage trop peu régulier et il devient nécessaire de remailler le domaine. De plus les oscillations numériques parasites rendent la phase de remaillage très importante car on y fait souvent appel. L'impact du remaillage sur la qualité de la solution devient prépondérant pour ce qui concerne la conservation de l'ordre de précision et la stabilité. Parfois la conservativité elle-même est mal assurée par le processus de remaillage. Celui-ci se doit d'être particulièrement efficace tant sur le choix du nouveau maillage, la phase de projection de l'information, la conservation de la stabilité et le respect de la conservativité.
Notons qu'il est relativement difficile de faire fonctionner une méthode lagrangienne pure sur des maillages non structurés de triangles. Par rapport à des maillages quadrangulaires, les instabilités se développent généralement de manière plus radicale, et enfin l'augmentation de l'ordre de précision en espace s'avère problématique.

Dans ce travail nous avons cherché à adapter les méthodes de type Galerkin Discontinu (GD) à la formulation lagrangienne. Les variables physiques UJ sont polynômiales par maille en coordonnées de lagrange. Un système aux moments est mis en évidence. Le nombre de moments dépend bien évidemment du degré des polynômes décrivant les variables physiques. Par la donnée d'une base de polynômes dans chaque maille, c'est

[1] au sens où nous l'avons défini dans le deuxième chapitre.

une hiérarchie de schémas numériques qui est construite. Avec ce type de méthode, au moins théoriquement, la montée en ordre de précision est envisageable. Cependant comme le montrent des travaux récents sur les méthodes de GD en Euler, les limiteurs de pentes pour des polynômes d'ordre 1 sont difficilement étendus aux cas de polynômes d'ordre supérieur. Dans notre méthode, une variable physique est décrite uniquement à l'aide de ses moments en formulation de Lagrange, impliquant que la notion de limiteur en variables d'Euler n'a plus la même signification en Lagrange. Pour s'affranchir dans une certaine mesure, des limiteurs de pente, il a été imaginé une procédure dissipative du calcul des flux. Cette procédure est intimement liée aux propriétés des polynômes de Bernstein, utilisés comme base de décomposition pour les moments, ainsi qu'à la conservation de la positivité du jacobien[2]. Nous avons démontré qu'un jeu de $n+1$ moments positifs (par exemple pour le jacobien en 1D) engendre un polynôme de degré (n), ayant les mêmes moments, qui peut être localement négatif. Par contre si on « confond » moments normalisés par rapport aux bases de Bernstein et coordonnées de Bernstein alors le polynôme que l'on obtient est un polynôme de degré (n) positif, conservant la moyenne mais qui est « écrasé » vers celle-ci : c'est un polynôme que nous avons appelé (n)-diffusé. De plus nous avons démontré que ce polynôme (n)-diffusé converge en norme L^p quand n tend vers l'infini, vers le polynôme ayant les mêmes moments. Grâce à de tels polynômes nous sommes en mesure d'assurer la positivité de toutes les variables physiques dès lors que tous ses moments sont positifs, tout en ajoutant de la diffusion numérique au schéma. Ainsi nous construisons une méthode conservative et qui respecte la positivité.

Sur une interface entre deux mailles, des sauts des variables physiques apparaîssent naturellement puisque les variables sont polynômiales par maille. Les dérivées de ces sauts au sens des distributions donnent des masses de Dirac. Il en est de même des sauts des moments des variables physiques qui, dérivés au sens des distributions, donnent des moments de masses de Dirac. Il s'agit alors de répartir ces moments entre les deux mailles ; c'est-à-dire de trouver une valeur intermédiaire pour les « casser » en deux. Pour cela on utilise un problème de Riemann entre les moments des états de part et d'autre de l'interface **eulérienne**. Un solveur de Riemann acoustique aux moments a été développé, il ne nécessite que la connaissance de la vitesse du son dans les mailles et présente un rapport qualité/prix attractif, ce qui est un net avantage dans la mesure où nous avons à calculer autant de problèmes de Riemann par arête qu'il y a de polynômes non identiquement nuls sur cette arête[3]. C'est par l'intermédiaire du solveur de Riemann qu'un échange d'énergie a lieu de maille à maille, le reste des calculs s'effectuant avec la seule connaissance de l'état interne dans la maille courante.

La formulation lagrangienne possède la caractéristique de ne pas nécessiter la connaissance de la position eulérienne d'un élément de matière. Cependant lorsqu'il devient nécessaire de remailler le domaine, se pose alors la question de déterminer où se trouve la matière en variables d'Euler.
Si on décide de déterminer où se trouve le maillage en coordonnées d'Euler, alors il s'agit de se donner la vitesse de déplacement de chaque point du maillage. Avec une vitesse linéaire sur chaque triangle, un triangle reste un triangle au cours de son déplacement, et on est capable de déterminer un « maillage » sur lequel on projette l'information. En fait il ne s'agit pas véritablement d'un maillage puisque l'aspect GD fait qu'une arête évolue différemment dans ses deux triangles. Cela implique que tous les points internes aux triangles ont une position eulérienne unique et bien définie, par contre tous les points des arêtes, et les sommets en particulier ont plusieurs positions eulériennes. En fin de compte il est nécessaire de faire une approximation pour se donner un véritable maillage (sans décollement ni recouvrement, où les arêtes ne se croisent pas) sur lequel projeter l'information. Une complication supplémentaire apparaît avec l'utilisation de polynômes de $\mathbb{P}_n,\ n>1$, puisqu'une arête (une droite) ne le reste pas au cours du temps. Comme il faut (faudrait) faire correspondre la précision du schéma numérique avec la précision du positionnement de la matière, les méthodes de type GD en Lagrange sont souvent restreintes à des données linéaires par maille.
Afin de s'affranchir de ce problème nous avons imaginé une manière de projeter l'information non pas sur un domaine continu, difficile à déterminer, mais sur un domaine discret constitué de particules numériques. Ces

[2]Le respect de la positivité du jacobien permet d'assurer non seulement la cohérence du changement de variables, mais aussi la positivité de la densité et de la pression.

[3]En 2D pour des polynômes d'ordre (2) on calcule 3 problèmes de Riemann par arête, en 3D on arriverait à 6 par face de tétraèdre, d'où l'intérêt d'un solveur de Riemann efficace.

particules se déplacent au cours du calcul à la vitesse du fluide dont la précision est celle du schéma numérique. Elles portent un ensemble de poids relatifs aux variables physiques et aux variables géométriques décrivant le taux de dilatation/compression ponctuel. Ainsi toute l'information nécessaire à la description du fluide est projetée sur les particules. Il s'agit alors de se donner un nouveau maillage du domaine et de déduire les moments dans les nouvelles mailles. Nous avons montré que ce type de projection/remaillage est valide tant qu'un nombre minimal de particule(s) vit dans chaque maille. Ainsi la méthode pourrait être utilisée comme une méthode ALE ; tous les k cycles l'information est projetée sur les particules puis des particules sur un nouveau maillage sur lequel on effectue l autres cycles... Ce type de procédé est assez utile pour suivre facilement des zones particulières du domaine puisque la position lagrangienne des particules n'est pas une contrainte du problème. En l'occurence on peut placer à l'instant initial un nombre conséquent de particules de part et d'autre d'une arête afin de la suivre au cours de son déplacement par exemple.

Les tests effectués sur les équations de la dynamique des gaz ont montré que la méthode se comporte bien. Afin de la tester dans des conditions moins académiques, nous l'avons adaptée au domaine de la physique de l'Interaction Laser/Plasma (ILP). La construction prochaine de lasers de forte puissance implique un effort accru du CEA dans la compréhension de la physique des interactions entre le laser et le monde environnant (considéré comme un plasma partiellement ou totalement ionisé). La physique mise en jeu est excessivement complexe et le recours à la simulation numérique est une évidence. La modélisation simple du couplage entre le champ du laser et le plasma se fait à l'aide de termes sources dans les équations de la dynamique des gaz. Pour la plupart, ces termes sources s'écrivent sous une forme non conservative impliquant qu'il a fallu imaginer une manière *ad hoc* de les traiter. Une caractéristique du domaine de la physique de l'ILP est l'absence de fortes ondes de choc, les gradients pouvant cependant être très forts. Pour ce qui concerne la méthode numérique, cette caractéristique se résume au fait qu'aucun limiteur de pente n'est nécessaire. La diffusion numérique ajoutée au cours du calcul suffit à stabiliser le schéma.
Un ensemble de résultats analytiques en 1D a été comparé aux résultats numériques fournis par la méthode. Leur adéquation montre que la manière de traiter les termes sources, au moins sur ces cas, est valide. L'extension en 2D semble donner des résultats qualitativement proche des prédictions des physiciens. Désormais la méthode se trouve entre leurs mains pour être testée méthodiquement. A terme il s'agit de simuler la présence de quelques centaines de *speckles* qui interagissent non seulement ensemble, mais aussi avec la source laser. La présence de ces *speckles* induit des perturbations de densité du plasma comme nous avons pu le voir. De telles perturbations peuvent avoir un effet destructeur sur la quantité d'énergie déposée par le laser. De plus des erreurs de pointage du laser pourraient apparaître comme conséquence de la création de « canaux » qui guident le laser vers un autre point de focalisation que celui escompté. La source laser est actuellement simulée par un autre code de calcul du CEA baptisé PARAX. Le couplage de PARAX et de la méthode présentée donne un outil de prédiction aux physiciens dont le but est de préparer les futures expériences avec les lasers de forte puissance.

La nécessité de simuler de telles expériences en 3D est réelle dans la mesure où certains phénomènes physiques ne pourront être captés qu'à l'aide de codes 3D plan. Malgré l'augmentation de la puissance de calcul, ces futurs codes nécessitent l'apport de toutes les nouveautés numériques. L'amélioration de la précision dans une maille pourrait être une solution alternative à l'utilisation de maillages à plusieurs dizaines de millions de mailles : c'est en ce sens que les schémas de type GD ou encore les schémas distributifs peuvent jouer un rôle dans un avenir proche. Quant aux méthodes en formulation lagrangienne, elles trouvent un regain d'intérêt. Dans les méthodes ALE la phase lagrangienne se doit d'être bien résolue. De plus en plus il semble que le monde de l'ALE tend à privilégier plusieurs cycles de calcul en lagrange avant une projection et éventuellement un remaillage. Ainsi une méthode de résolution de la phase lagrangienne du type présenté aurait au moins deux avantages pour l'ALE : premièrement on gagnerait en précision à chaque cycle lagrangien, deuxièmement la stabilité supplémentaire n'obligerait plus à projeter/remailler régulièrement, d'où le gain en temps et en précision puisque la phase projection/remaillage les diminue.
Enfin une méthode à l'aide de particules simplifie grandement le remaillage puisque l'on s'affranchit de la détermination du maillage lagrangien en variables d'Euler. De plus il est possible d'augmenter la précision avec laquelle est effectuée la projection et le remaillage : il suffit de multiplier le nombre de particules dans le do-

maine. En fait cette manière de projeter/remailler ne dépend pas du degré des polynômes de base de la méthode GD. C'est aussi un avantage que d'avoir exactement la même procédure quelque soit l'ordre de précision du schéma numérique, il suffit d'ajuster le nombre de particules par maille pour conserver la précision au moins formellement.

La réalisation de simulations numériques de grande envergure nécessite que tous les domaines connexes à l'analyse numérique profitent des avancées de celle-ci. Les physiciens ont une compréhension de plus en plus fines du monde qui les entoure. Ils fournissent aux numériciens des problèmes qui sont de véritables gageures. Le numéricien doit imaginer dans un temps relativement court des méthodes numériques adaptées à ces problèmes précis. Il se doit de comprendre en substance les difficultés des modélisations des physiciens afin de trouver une manière d'approcher celles-ci dans des conditions humainement acceptables en terme de temps et en fonction de la technologie disponible.
Bien que l'évolution des ordinateurs fasse que l'on ait désormais accès à des puissances de calcul phénoménales, il serait illusoire et naïf de croire qu'il suffit de décupler un nombre de maille pour capter des phénomènes physiques plus précis. Seule la description de cette même physique permettra d'accentuer notre connaissance du monde à des échelles de plus en plus fines. L'outil numérique, même avec d'énormes machines, ne reste qu'un outil qui se doit d'évoluer de conserve avec et pour ses utilisateurs.

Chapter 10

Annexes

10.1 Annexe I : sur les gradients des polynômes de Bernstein

En 1D si (λ_1, λ_2) est le système de coordonnées barycentriques associé au segment I alors on a la formule

$$\int_I \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} dX = mes(I) \frac{(k_1!)(k_2!)}{(k_1 + k_2 + 1)!}. \tag{10.1}$$

En 2D si $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est le système de coordonnées barycentriques associé au triangle T alors on a la formule

$$\int_T \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3} dX_1 dX_2 = 2\ mes(T) \frac{(k_1!)(k_2!)(k_3!)}{(k_1 + k_2 + k_3 + 2)!}. \tag{10.2}$$

Et plus généralement en dimension n, si Q est le (n)-simplexe associé alors

$$\int_Q \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \cdots \lambda_{n+1}^{k_{n+1}} dX_1 \cdots dX_{n+1} = n\ mes(Q) \frac{(k_1!)(k_2!) \cdots (k_{n+1}!)}{(k_1 + k_2 + \cdots + k_{n+1} + n)!}. \tag{10.3}$$

Comme tous les polynômes de Bernstein s'expriment en fonction de produits de puissances des coordonnées barycentriques, alors les formules précédentes permettent de calculer les intégrales de produits de polynômes de Bernstein sans aucune difficulté.

En ce qui concerne les gradients des polynômes de Bernstein en 2D il suffit de remarquer que

$$\overrightarrow{\nabla_\xi \lambda_1} = -\frac{L_1}{2|T|} \overrightarrow{\nu_1}, \tag{10.4}$$

$$\overrightarrow{\nabla_\xi \lambda_2} = -\frac{L_2}{2|T|} \overrightarrow{\nu_2}, \tag{10.5}$$

$$\overrightarrow{\nabla_\xi \lambda_3} = -\frac{L_3}{2|T|} \overrightarrow{\nu_3}, \tag{10.6}$$

où $|T| = mes(T)$. Comme tout σ_k est une fonction composée de puissances des $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, alors $\overrightarrow{\nabla_\xi \sigma_k}$ s'exprime simplement à l'aide des formules précédentes.

10.2 Annexe II : sur les intégrales des polynômes de Bernstein

En 1D les intégrales des polynômes de Bernstein sur une maille I de taille Δx pour $(n) = 2$ sont données dans les tableaux suivants

Intégrales simples :

$$\begin{aligned}\int_I \sigma_i^+(x)dx &= \frac{\Delta x}{3}\\ \int_I \sigma_{i+1/2}(x)dx &= \frac{\Delta x}{3}\\ \int_I \sigma_{i+1}^-(x)dx &= \frac{\Delta x}{3}\end{aligned}$$

Intégrales doubles :

$\int_I \sigma_k(x)\sigma_h(x)dx$	$\sigma_h = \sigma_i^+$	$\sigma_h = \sigma_{i+1/2}$	$\sigma_h = \sigma_{i+1}^-$
$\sigma_k = \sigma_i^+$	$\frac{\Delta x}{5}$	$\frac{\Delta x}{10}$	$\frac{\Delta x}{30}$
$\sigma_k = \sigma_{i+1/2}$	$\frac{\Delta x}{10}$	$\frac{2\Delta x}{15}$	$\frac{\Delta x}{10}$
$\sigma_k = \sigma_{i+1}^-$	$\frac{\Delta x}{30}$	$\frac{\Delta x}{10}$	$\frac{\Delta x}{5}$

Intégrales triples :

$\int_I \sigma_k(x)\sigma_h(x)\sigma_l(x)dx$	$\sigma_h = \sigma_i^+$	$\sigma_h = \sigma_{i+1/2}$	$\sigma_h = \sigma_{i+1}^-$
$\sigma_k = \sigma_i^+$	$\sigma_l = \sigma_i^+ \Rightarrow \frac{\Delta x}{7}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1/2} \Rightarrow \frac{\Delta x}{21}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1}^- \Rightarrow \frac{\Delta x}{105}$	$\sigma_l = \sigma_i^+ \Rightarrow \frac{\Delta x}{21}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1/2} \Rightarrow \frac{4\Delta x}{105}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1}^- \Rightarrow \frac{\Delta x}{70}$	$\sigma_l = \sigma_i^+ \Rightarrow \frac{\Delta x}{105}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1/2} \Rightarrow \frac{\Delta x}{70}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1}^- \Rightarrow \frac{\Delta x}{105}$
$\sigma_k = \sigma_{i+1/2}$	$\sigma_l = \sigma_i^+ \Rightarrow \frac{\Delta x}{21}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1/2} \Rightarrow \frac{4\Delta x}{105}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1}^- \Rightarrow \frac{\Delta x}{70}$	$\sigma_l = \sigma_i^+ \Rightarrow \frac{4\Delta x}{105}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1/2} \Rightarrow \frac{2\Delta x}{35}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1}^- \Rightarrow \frac{4\Delta x}{105}$	$\sigma_l = \sigma_i^+ \Rightarrow \frac{\Delta x}{70}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1/2} \Rightarrow \frac{4\Delta x}{105}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1}^- \Rightarrow \frac{\Delta x}{21}$
$\sigma_k = \sigma_{i+1}^-$	$\sigma_l = \sigma_i^+ \Rightarrow \frac{\Delta x}{105}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1/2} \Rightarrow \frac{\Delta x}{70}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1}^- \Rightarrow \frac{\Delta x}{105}$	$\sigma_l = \sigma_i^+ \Rightarrow \frac{\Delta x}{70}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1/2} \Rightarrow \frac{4\Delta x}{105}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1}^- \Rightarrow \frac{\Delta x}{21}$	$\sigma_l = \sigma_i^+ \Rightarrow \frac{\Delta x}{105}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1/2} \Rightarrow \frac{\Delta x}{21}$ $\sigma_l = \sigma_{i+1}^- \Rightarrow \frac{\Delta x}{7}$

Intégrales $\int_{I_{i+1/2}} \partial_x\sigma_k(x)\sigma_h(x)dx$:

$\int_I \partial_x\sigma_k(x)\sigma_h(x)dx$	$\sigma_h = \sigma_i^+$	$\sigma_h = \sigma_{i+1/2}$	$\sigma_h = \sigma_{i+1}^-$
$\sigma_k = \sigma_i^+$	$\frac{\Delta x}{2}$	$\frac{\Delta x}{3}$	$\frac{\Delta x}{6}$
$\sigma_k = \sigma_{i+1/2}$	$-\frac{\Delta x}{3}$	0	$\frac{\Delta x}{3}$
$\sigma_k = \sigma_{i+1}^-$	$-\frac{\Delta x}{6}$	$-\frac{\Delta x}{3}$	$-\frac{\Delta x}{2}$

En 2D sur un triangle T dont la surface est notée abusivement T, les tableaux des intégrales des polynômes de Bernstein pour $(n) = 2$ sont donnés par

Intégrales simples :

$$\forall 0 \leq i \leq 5 \quad \int_T \sigma_i(\vec{x})dxdy = \frac{T}{6}$$

Intégrales doubles :

$\int_T \sigma_k(\vec{x})\sigma_h(\vec{x})dxdy$	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
σ_0	$\frac{T}{15}$	$\frac{T}{30}$	$\frac{T}{90}$	$\frac{T}{90}$	$\frac{T}{90}$	$\frac{T}{30}$
σ_1	$\frac{T}{30}$	$\frac{2T}{45}$	$\frac{T}{30}$	$\frac{T}{45}$	$\frac{T}{90}$	$\frac{T}{45}$
σ_2	$\frac{T}{90}$	$\frac{T}{30}$	$\frac{T}{15}$	$\frac{T}{30}$	$\frac{T}{90}$	$\frac{T}{90}$
σ_3	$\frac{T}{90}$	$\frac{T}{45}$	$\frac{T}{30}$	$\frac{2T}{45}$	$\frac{T}{30}$	$\frac{T}{45}$
σ_4	$\frac{T}{90}$	$\frac{T}{90}$	$\frac{T}{90}$	$\frac{T}{30}$	$\frac{T}{15}$	$\frac{T}{30}$
σ_5	$\frac{T}{30}$	$\frac{T}{45}$	$\frac{T}{90}$	$\frac{T}{45}$	$\frac{T}{30}$	$\frac{2T}{45}$

Intégrales : $\int_T \overrightarrow{\nabla_x \sigma_k} \sigma_h dxdy \equiv (\star)$ (rappel : L_h est la longueur du côté numéro h dans la numérotation locale à T, $\vec{\nu}_h$ est la normale unitaire sortante à ce même côté)

$(\star)$	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
$\overrightarrow{\nabla_x \sigma_0}$	$\frac{-1}{10}L_1\vec{\nu}_1$	$\frac{-1}{15}L_1\vec{\nu}_1$	$\frac{-1}{30}L_1\vec{\nu}_1$	$\frac{-1}{30}L_1\vec{\nu}_1$	$\frac{-1}{30}L_1\vec{\nu}_1$	$\frac{-1}{15}L_1\vec{\nu}_1$
$\overrightarrow{\nabla_x \sigma_1}$	$\frac{-1}{30}L_1\vec{\nu}_1 + \frac{-1}{10}L_2\vec{\nu}_2$	$\frac{-1}{15}L_1\vec{\nu}_1 + \frac{-1}{15}L_2\vec{\nu}_2$	$\frac{-1}{10}L_1\vec{\nu}_1 + \frac{-1}{30}L_2\vec{\nu}_2$	$\frac{-1}{15}L_1\vec{\nu}_1 + \frac{-1}{30}L_2\vec{\nu}_2$	$\frac{-1}{30}L_1\vec{\nu}_1 + \frac{-1}{30}L_2\vec{\nu}_2$	$\frac{-1}{30}L_1\vec{\nu}_1 + \frac{-1}{15}L_2\vec{\nu}_2$
$\overrightarrow{\nabla_x \sigma_2}$	$\frac{-1}{30}L_2\vec{\nu}_2$	$\frac{-1}{15}L_2\vec{\nu}_2$	$\frac{-1}{10}L_2\vec{\nu}_2$	$\frac{-1}{15}L_2\vec{\nu}_2$	$\frac{-1}{30}L_2\vec{\nu}_2$	$\frac{-1}{30}L_2\vec{\nu}_2$
$\overrightarrow{\nabla_x \sigma_3}$	$\frac{-1}{30}L_3\vec{\nu}_3 + \frac{-1}{30}L_2\vec{\nu}_2$	$\frac{-1}{15}L_3\vec{\nu}_3 + \frac{-1}{30}L_2\vec{\nu}_2$	$\frac{-1}{10}L_3\vec{\nu}_3 + \frac{-1}{30}L_2\vec{\nu}_2$	$\frac{-1}{15}L_3\vec{\nu}_3 + \frac{-1}{15}L_2\vec{\nu}_2$	$\frac{-1}{30}L_3\vec{\nu}_3 + \frac{-1}{10}L_2\vec{\nu}_2$	$\frac{-1}{30}L_3\vec{\nu}_3 + \frac{-1}{15}L_2\vec{\nu}_2$
$\overrightarrow{\nabla_x \sigma_4}$	$\frac{-1}{30}L_3\vec{\nu}_3$	$\frac{-1}{30}L_3\vec{\nu}_3$	$\frac{-1}{30}L_3\vec{\nu}_3$	$\frac{-1}{15}L_3\vec{\nu}_3$	$\frac{-1}{10}L_3\vec{\nu}_3$	$\frac{-1}{15}L_3\vec{\nu}_3$
$\overrightarrow{\nabla_x \sigma_5}$	$\frac{-1}{30}L_1\vec{\nu}_1 + \frac{-1}{10}L_3\vec{\nu}_3$	$\frac{-1}{30}L_1\vec{\nu}_1 + \frac{-1}{15}L_3\vec{\nu}_3$	$\frac{-1}{30}L_1\vec{\nu}_1 + \frac{-1}{30}L_3\vec{\nu}_3$	$\frac{-1}{15}L_1\vec{\nu}_1 + \frac{-1}{30}L_3\vec{\nu}_3$	$\frac{-1}{10}L_1\vec{\nu}_1 + \frac{-1}{30}L_3\vec{\nu}_3$	$\frac{-1}{15}L_1\vec{\nu}_1 + \frac{-1}{15}L_3\vec{\nu}_3$

Bibliography

[1] A.Burbeau. – *Méthodes de Galerkine discontinue d'ordre élevé pour la simulation instationnaire en maillage non structuré.* – Thèse de PhD, Université de Bordeaux I, 2000.

[2] B.Cockburn. – *An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Problems*, chap. 2. – Springer Verlag Berlin/New York, Advanced Numerical Approximation of Non Linear Hyperbolic Equations, 1998volume 1697.

[3] B.Cockburn et C.W.Shu. – TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: general framework. *Mathematics of Computation*, vol. 52, 1989, pp. 411–435.

[4] B.Cockburn et C.W.Shu. – The Runge-Kutta local projection P1 discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws. *M2AN*, vol. 25, 1991.

[5] B.Cockburn et C.W.Shu. – The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws v: multidimensional systems. *Journal of Computational Physics*, vol. 141, 1998, pp. 199–224.

[6] B.Cockburn, S.Hou et C.W.Shu. – The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: the multidimensional case. *Mathematics of Computation*, vol. 54, 1990, pp. 545–581.

[7] B.Cockburn et S.Y.Lin. – TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: one-dimensional systems. *Journal of Computational Physics*, vol. 84, 1989, pp. 90–113.

[8] B.Einfeld. – On Godunov-type methods for gas dynamics. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, vol. 25, 1988, pp. 294–318.

[9] B.VanLeer. – Towards the ultimate conservative difference scheme : V. a second order sequel to Godunov's method. *Journal of Computational Physics*, vol. 32, 1979, pp. 101–132.

[10] C.D.Munz, R.Schneider, E.Sonnendrucker, E.Stein, U.Voss et T.Westermann. – A finite-volume particle-in-cell method for the numerical treatment of Maxwell-Lorentz equations on boundary-fitted meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, 1999, pp. 461–487.

[11] C.E.Baumann et J.T.Oden. – An adaptative-order discontinuous Galerkin method for the solution of the Euler equations of gas dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, 2000, pp. 61–73.

[12] C.Favier. – *Dynamique lente d'un plasma éclairé par un laser intense.* – Rapport technique nEP : 205.3-02, CEA/Bruyères-le-Chatel, 2000.

[13] C.Y.Loh et M.S.Liou. – Lagrangian solution of supersonic real gas flows. *Journal of Computational Physics*, vol. 104, 1993, pp. 150–161.

[14] C.Y.Loh et W.H.Hui. – A lagrangian method for time-dependent inviscid flow computation. *SIAM Journal of Scientific Computing*, vol. 22, 2000, pp. 330–350.

[15] E.Capiez. – *Etude numérique des phénomènes de filamentation des faisceaux lasers entrant en interaction avec un plasma.* – Rapport technique nEP : 235.3-02, CEA/Bruyères-le-Chatel, 2000.

[16] E.Godlewski et P.A.Raviart. – *Numerical Approximation of hyperbolic system of conservation laws.* – Springer Verlag, 1996.

[17] F.E.Toro. – *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics.* – Springer Verlag, 1997.

[18] F.H.Harlow. – The Particle-In-Cell computing method for fluid dynamics. *Methods in Comput. Phys.*, vol. 3, 1964, pp. 319–343.

[19] G.G.Lorentz. – *Bernstein polynomials.* – University of Toronto press, 1953, *Mathematical expositions.*

[20] G.Godinaud, A.Y.LeRoux, R.Loubère et J.Ovadia. – Une technique nouvelle d'antidiffusion dynamique. *C.R.Acad.Sci.Paris*, vol. 333, 2001, pp. 957–960. – Serie I.

[21] G.Riazuelo. – *Etude théorique et numérique de l'influence du lissage optique sur la filamentation des faisceaux lasers dans les plasmas sous-critiques de fusion inertielle.* – Thèse de PhD, Université Paris XI, 1999.

[22] H.Guillard et R.Abgrall. – *Modélisation numérique des fluides compressibles.* – Series in applied mathematics - P.G.Cialet P.L.Lions, 2001.

[23] H.Yserentant. – A new class of particle methods. *Numerisch Mathematik*, vol. 76, 1997, pp. 87–109.

[24] H.Yserentant. – A particle model of compressible fluids. *Numerisch Mathematik*, vol. 76, 1997, pp. 111–142.

[25] H.Yserentant. – Entropy generation and shock resolution in the particle model of compressible fluids. *Numerisch Mathematik*, vol. 82, 1999, pp. 161–177.

[26] H.Yserentant. – Particles of variable size. *Numerisch Mathematik*, vol. 82, 1999, pp. 143–159.

[27] J.G.Liu et C.W.Shu. – A high-order discontinuous Galerkin method for 2D incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, vol. 160, 2000, pp. 577–596.

[28] J.J.Monaghan. – Simulating free surface flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, vol. 110, 1994, pp. 399–406.

[29] J.J.Monaghan et A.Kocharyan. – Sph simulation of multi-phase flow. *Computer Physics Communications*, vol. 87, 1995, pp. 225–235.

[30] L.D.Landau et E.M.Lifshitz. – *Fluid Mechanics.* – Pergamon Press, 1982.

[31] M.A.Blain, G.Bonnaud, A.Chiron et G.Riazuelo. – *Autofocalisation et filamentation d'un faisceau laser dans le cadre de l'approximation paraxiale et stationnaire - partie I : aspects théoriques.* – Rapport technique nCEA-R-5716(I), CEA, 1996.

[32] M.A.Blain, G.Bonnaud, A.Chiron et G.Riazuelo. – *Autofocalisation et filamentation d'un faisceau laser dans le cadre de l'approximation paraxiale et stationnaire - partie II : simulations numériques.* – Rapport technique nCEA-R-5716(II), CEA, 1996.

[33] M.Brio, A.R.Zakharian et G.M.Webb. – Two-dimensional Riemann solver for Euler equations of gas dynamics. *Journal of Computational Physics*, vol. 167, 2001, pp. 177–195.

[34] M.N.LeRoux, M.I.Cozic et R.Loubère. – Analysis of completely discrete finite element method for a free boundary diffusion problem with absorption. *Journal of Computational and Applied Mathemathics*, vol. 1-2, 2001, pp. 143–164.

[35] M.S.Liou. – An extended lagrangian method. *Journal of Computational Physics*, vol. 118, 1995, pp. 294–309.

[36] P.Collela et P.R.Woodward. – The Piecewise Parabolic Method (ppm) for gas-dynamical simulations. *Journal of Computational Physics*, vol. 54, 1984, pp. 174–201.

[37] P.Knupp, L.G.Margolin et M.Shashkov. – Reference Jacobian optimization-based rezone strategies for Arbitrary-Lagrangian-Eulerian methods. *Journal of Computational Physics*, vol. 176, 2002, pp. 93–128.

[38] P.K.Sweby. – High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM, Journal of Numerical Analysis*, vol. 21, 1984, pp. 995–1011.

[39] P.Lax et X.D.Liu. – Solution of two-dimentional Riemann problems of gas dynamics by positive schemes. *SIAM Journal of Scientific Computing*, vol. 19, 1998, pp. 319–340.

[40] P.M.Knupp. – Achieving finite element mesh quality via optimization of the jacobian matrix norm and associated quantities. part I: A framework for surface mesh optimization. *Internat.J..Numer.Methods Engrg.*, vol. 48, 2000, pp. 401–420.

[41] P.M.Knupp. – Achieving finite element mesh quality via optimization of the jacobian matrix norm and associated quantities. part II: A framework for volume mesh optimization. *Internat.J..Numer.Methods Engrg.*, vol. 48, 2000, pp. 1165–1185.

[42] P.M.Knupp. – Algebraic mesh quality metrics. *SIAM Journal of Scientific Computing*, vol. 23, 2001, pp. 193–218.

[43] P.M.Knupp et Robidoux. – A framework for variational grid generation: conditionning the jacobian matrix with matrix norms. *SIAM Journal of Scientific Computing*, vol. 21, 2000, pp. 2029–2047.

[44] P.R.Woodward et P.Collela. – The numerical simulation of 2D fluid flow with strong shock. *Journal of Computational Physics*, 1984, pp. 115–173.

[45] R.Abgrall. – On essentially non-oscillatory schemes on unstructured meshes : analysis and implementation. *Journal of Computational Physics*, vol. 114, 1994, pp. 45–58.

[46] R.Abgrall, B.Nkonga et R.Saurel. – Efficient numerical approximation of compressible multi-material flow for unstructured meshes. – 2002. Computer and Fluid, sous presse.

[47] R.Abgrall et S.Karni. – Compressible multifluids. *Journal of Computational Physics*, vol. 169, 2001, pp. 594–623.

[48] R.A.Gingold et J.J.Monaghan. – Smoothed Particle Hydrodynamics : Theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 181, 1977, pp. 375–389.

[49] R.Biswas, K.D.Devine et J.E.Flaherty. – Parallel, adaptative finite element methods for conservation laws. *Applied Numerical Mathematics*, vol. 14, 1994, pp. 255–283.

[50] R.J.Mason. – Implicit moment PIC-hybrid simulation of collisional plasmas. *Journal of Computational Physics*, vol. 51, 1983, pp. 484–501.

[51] R.Liska et B.Wendroff. – Comparision of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations. *Conservation Laws Preprint Server, www.math.ntnu.no/conservation/*, 2001.

[52] R.Saurel et R.Abgrall. – A simple method for compressible multifluid flows. *SIAM Journal of Scientific Computing*, vol. 21, 2000, pp. 115–1145.

[53] R.T.Farouki. – Legendre-Bernstein basis transformations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 119, 2000, pp. 145–160.

[54] R.T.Farouki et C.A.Neff. – On the numerical condition of Bernstein-Bezier subdivision processes. *Mathematics of Computation*, vol. 55, october 1990, pp. 637–647.

[55] R.T.Farouki et N.T.Goodman. – On the optimal stability of the Bernstein basis. *Mathematics of Computation*, vol. 65, october 1996, pp. 1553–1566.

[56] R.T.Farouki et V.T.Rajan. – On the numerical condition of polynomials in Bernstein form. *Computer Aided Geometric Design*, vol. 4, 1987, pp. 191–216.

[57] S.Bernstein. – Démonstration du théorème de Weierstrass, fondée sur le calcul des probabilités. *Commun.Soc.Math.Kharkow*, vol. 13, 1912-1913.

[58] S.K.Godunov. – A finite-difference method for the numerical computation and discontinuous solution of the equation of fluid dynamics. *Math.SB.*, vol. 47, 1959, pp. 357–393.

[59] S.K.Godunov, A.Zabrodin, M.Ivanov, A.Kraiko et G.Prokopov. – *Résolution Numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz.* – Edition Mir.Moscou, 1979.

[60] T.N.T.Goodman, H.Oruc et G.M.Phillips. – Convexity and generalized Bernstein polynomials. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. 42, 1999, pp. 179–190.

[61] W.B.Bateson et D.W.Hewett. – Grid and particle hydrodynamics : Beyond hydrodynamics via fluid element particle-in-cell. *Journal of Computational Physics*, vol. 144, 1998, pp. 358–378.

[62] W.H.Hui et C.Y.Loh. – A new lagrangian method for steady supersonic flow computation. part i. Godunov scheme. *Journal of Computational Physics*, vol. 89, 1990, pp. 207–240.

[63] W.H.Hui et C.Y.Loh. – A new lagrangian method for steady supersonic flow computation. part II. slipline resolution. *Journal of Computational Physics*, vol. 103, 1992, pp. 450–464.

[64] W.H.Hui et C.Y.Loh. – A new lagrangian method for steady supersonic flow computation. part III. strong shocks. *Journal of Computational Physics*, vol. 103, 1992, pp. 465–471.

[65] W.H.Hui, P.Y.Li et Z.W.Li. – A unified coordinate system for solving the two-dimensional Euler equations. *Journal of Computational Physics*, vol. 153, 1999, pp. 596–637.

[66] W.H.Hui et Y.He. – Hyperbolicity and optimal coordinates for the three-dimensional supersonic Euler equations. *SIAM J.Appl.Math.*, vol. 57, 1997.

[67] W.Rudin. – *Analyse réelle et complexe.* – Mc Graw-Hill, Inc, 1980.

Résumé

Une méthode lagrangienne de type Galerkin Discontinu est développée dans ce travail pour le système de la dynamique des gaz en maillage non structuré. La méthode numérique suppose que les données sont discontinues par maille et que l'on connait un certain nombre de leurs moments. La base des polynômes de Bernstein est utilisée comme base de décomposition. A l'aide de cette base une méthode de régularisation des distributions préservant la positivité a été construite. Ce faisant le calcul des termes de flux est conservatif et assure la positivité tout en ajoutant de la diffusion numérique. A l'interface des mailles, les sauts des variables physiques font apparaître des masses de Dirac qu'il s'agit de répartir de part et d'autre de cette interface. La valeur permettant de répartir ce saut est déduite d'un problème de Riemann 1D. En fonction du degré des polynômes de base, sur chaque interface plusieurs problèmes de Riemann sur les moments des variables physiques sont à résoudre. Un solveur de Riemann acoustique est utilisé. Le schéma numérique est ensuite stabilisé par une gestion du pas de temps (CFL+condition de positivité) ainsi que par un limiteur ne corrigeant que les zones de compression. Une méthode de remaillage à l'aide de particule a été imaginée. Il s'agit de projeter toute l'information sur une population de particules (de masse de Dirac). Non seulement les variables physiques sont portées par les particules, mais aussi les variables géométriques rendant compte de la déformation du maillage. Ce remaillage est conservatif et un système de poids de particules permet d'adapter la précision du remaillage à la précision du schéma numérique. Des cas tests en 1D et 2D pour une base de polynômes de $\mathbb{P}_2$ sont présentés. On adapte ensuite cette méthode au cas particulier de la physique de l'interaction laser/plasma. Les termes sources adéquats sont ajoutés et traités. La méthode est validée par cas tests en 1D et 2D.

Mots Clés

Lagrange, méthode particulaire, méthode aux moments, Galerkin Discontinu, mécanique des fluides, interaction laser/plasma, problème de Riemann, schéma de Godunov, remaillage, polynôme de Bernstein

Abstract

A Discontinuous Galerkin type method written in lagrangian coordinates is described in this paper. This method works on unstructured meshes in 1D/2D for the euler equations. By using Bernstein polynomials a diffusive process has been added to stabilize the method. Thanks to this process the jacobian positivity is conserved during the computation ensuring the validity of the transformation from euler coordinates to lagrangian coordinates. The moment equations by respect to Bernstein basis are solved. A Riemann solver (on the moments) is used to treat the discontinuities between cells. The step size is constrained by a CFL type condition and the jacobian positivity. If necessary, a remeshing process has been developped using a particle method. All the information is carrying with particles whose eulerian positions are known. By this we do not need to define the eulerian position of the lagrangian mesh. This remeshing is locally conservative and the accuracy of the particle method can be adapted to the accuracy of the scheme. Some numerical tests in 1D and 2D show the efficiency of the method with a $\mathbb{P}_2$ basis. The last chapter describes the evolution of the method to the laser/plasma interactions domain. Ponderomotive effects have been added as source terms and treated by the method. In 1D and 2D some simulations have been made.

Key words

lagrangian, particle method, moment method, Discontinuous Galerkin method, fluid, laser/plasma interaction, Riemann problem, Godunov method, rezoning/remeshing, Bernstein polynomials