Une technique nouvelle d'Antidiffusion dynamique

Ghislaine Godinaud *, AlainYves LeRoux, Raphaël Loubère, Jean Ovadia

Abstract

Nous proposons une technique nouvelle de correction de résultats issus d'un code de calcul numérique fonctionnant sur un système hyperbolique. La méthode agit sur des données extraites lors d'une interruption du code et est indépendante à la fois du modèle mathématique et du schéma numérique, pourvu que ce modèle soit de nature hyperbolique et ce schéma suffisamment diffusif. Les tests numériques effectués montrent une bonne performance au niveau des discontinuités, qui peuvent être ainsi reduites à moins de deux mailles, et également sur la précision des détentes ou sur la conservation de certaines quantités, comme la masse.

A new method for dynamical antidiffusion

Abstract

We propose a new technique for enhancing the results coming from computational simulations with a hyperbolic system. The process works only on the extracted data obtained after an interruption of the program, and is not depending neither on the mathematical model nor on the numerical scheme, as long as the model is a hyperbolic one and the scheme is diffusive enough. The numerical tests show a good sharpening of the discontinuities, on less than two cells, and also a good precision on the rarefaction waves and the conservation of some quantities, such as the mass.

1 Introduction

Lors de la résolution numérique de systèmes hyperboliques, il est difficile de concilier les propriétés de stabilité et de précision. En assurant la stabilité, on provoque une perte de précision qui se manifeste par un phénomène cumulatif de diffusion des données, ce qui dénature en particulier les profils des chocs et des discontinuités de contact, ainsi que les extrémités des ondes de détente. Les techniques classiques de correction, souvent appelées d'antidiffusion, correspondent à évaluer la quantité de diffusion excessive du schéma à chaque pas de temps, et à la supprimer tant que cela ne nuit pas à la stabilité. La technique proposée fonctionne différemment, sans évaluer a priori cette diffusion excessive, ce qui offre ainsi l'avantage de la rendre indépendante du schéma utilisé, et aussi du modèle hyperbolique que l'on traite, dont on suppose la matrice de flux diagonalisable.

On dispose de deux champs de données $\{\varphi_i\}$ et $\{\psi_i\}$, correspondant aux valeurs d'un paramètre calculé, sur un maillage monodimensionnel uniforme (dont le pas d'espace est noté h) en deux instants distincts t et $t+\Delta t$. On note $x_j = jh(j \in \mathbb{Z})$ le noeud correspondant à la localisation des quantités φ_j et ψ_j. On se propose de traiter le champ $\{\varphi_i\}$ que l'on suppose être l'approximation d'une composante de la solution d'un système homogène.

L'idée consiste à créer un champ de vitesse u judicieusement initialisé, pour faire migrer les données $\{\varphi_i\}$ sur le maillage de telle façon que les chocs et les discontinuités de contact se redressent, sans dénaturer les détentes. On introduit un paramètre d'évolution fictif s et on note $F(x,s)$ le champ de données rectifiées par le déplacement à la vitesse u. Nous adoptons le modèle suivant

(1) $$u_s + u\,u_x = 0 \;;\; F_s + (uF)_x = 0 \,,$$

*email Ghislaine.Godinaud@math.u-bordeaux.fr, tel 05-56-84-60-98, fax 05-56-84-60-69, GRAMM-Math-Info, Université Bordeaux I, F-33405 Talence

qui est un système hyperbolique dégénéré, et que l'on discrétise par un schéma de type Godunov, en introduisant un incrément Δs puis un paramètre $\lambda = \dfrac{\Delta s}{h}$ de contrôle de stabilité. Le schéma s'écrit

$$u_i^{n+1} \;=\; u_i^n \;-\; \frac{\lambda}{2}\left((u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})^2 \;-\; (u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})^2\right), \tag{2}$$

$$F_i^{n+1} \;=\; F_i^n \;-\; \lambda\left(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\,F_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \;-\; u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\,F_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right), \tag{3}$$

avec

$$\left(u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, F_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \;=\; \begin{cases} (u_i^n, F_i^n) & si\ u_i^n \geq 0,\ u_i^n + u_{i+1}^n \geq 0, \\ (0,0) & si\ u_i^n < 0,\ u_{i+1}^n > 0, \\ (u_{i+1}^n, F_{i+1}^n) & si\ u_{i+1}^n \leq 0,\ u_i^n + u_{i+1}^n \leq 0. \end{cases} \tag{4}$$

L'initialisation de F se fait à partir des données du code:

$$F_i^0 \;=\; \varphi_i\,,$$

et λ est choisi de telle façon que la condition (CFL)

$$\lambda \max(|u_i^0|) \;\leq\; 1 \tag{5}$$

soit satisfaite. Le problème se réduit maintenant au choix judicieux des valeurs initiales u_i^0 du champ de vitesse.

2 Initialisation du champ de vitesse u

Le redressement d'un profil peut être assuré localement par un champ de vitesse positive dans le cas d'un profil décroissant et concave ou dans le cas d'un profil croissant et convexe. Il peut être assuré par un champ de vitesse négative dans les autres cas (croissant et concave, ou bien décroissant et convexe). Pour tester localement la convexité, au noeud $x = x_j$, on propose une méthode de projection sur la première fonction propre de l'opérateur $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ opérant sur $H_0^1(K_j)$ avec $K_j =]x_{j-2}, x_{j+2}[$. Cette fonction propre (normalisée) est donnée par

$$\sigma_j(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2h}}\sin(\frac{\pi(x - x_{j-2})}{4\;h}) \tag{1}$$

A partir des données $\{\varphi_i\}$ on construit une interpolée $P\varphi$ telle que $P\varphi(x_i) = \varphi_i$ pour tout i, et pour j fixé on définit la fonction affine $R_j\varphi$ par

$$R_j\varphi(x) \;=\; \frac{x_{j+2} - x}{4h}\,\varphi_{j-2} \;+\; \frac{x - x_{j-2}}{4h}\,\varphi_{j+2} \tag{2}$$

Alors, la fonction $q_j = P\varphi - R_j\varphi$ restreinte à K_j est un élément de $H_0^1(K_j)$ que l'on va projeter sur l'espace monodimensionnel engendré par la fonction propre σ_j. En notant P_j ce projecteur, on a

$$P_j q_j(x) \;=\; \alpha_j(\varphi)\,\sigma_j(x)\,, \tag{3}$$

avec

$$\alpha_j(\varphi) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2h}}\int_{K_j} q_j(x)\sin(\frac{\pi(x - x_{j-2})}{4h})\,dx\,. \tag{4}$$

En évaluant cette intégrale par la formule de Simpson, on obtient

$$\alpha_j(\varphi) \;=\; \frac{\sqrt{2h}}{6}\;\Big(2\varphi_j \;+\; 2\sqrt{2}(\varphi_{j+1} + \varphi_{j-1}) \;-\; (2\sqrt{2}+1)(\varphi_{j+2} + \varphi_{j-2})\Big) \tag{5}$$

et un développement limité au noeud x_j donne

$$(6) \qquad \alpha_j(\varphi) \;=\; -\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) h^{\frac{5}{2}}\,\varphi''(x_j) \;+\; h^3\epsilon_j(h)\;,$$

où $\epsilon_j(h)$ est un module de continuité. On pose

$$(7) \qquad \beta_j(\varphi) \;=\; -\,\frac{3}{3+2\sqrt{2}}\,h^{-\frac{5}{2}}\,\alpha_j(\varphi)\;,$$

qui sert à approcher $\varphi''(x_j)$.

Pour évaluer localement le gradient du champ de données, au noeud x_j, on pose

$$(8) \qquad \gamma_j(\varphi) \;=\; \begin{cases} 0 & si\ (\varphi_{j+1}-\varphi_j)(\varphi_j-\varphi_{j-1}) \;\le\; 0\;, \\ \frac{sg(\varphi_{j+1}-\varphi_j)}{h}\sqrt{(\varphi_{j+1}-\varphi_j)(\varphi_j-\varphi_{j-1})} & sinon\;. \end{cases}$$

Pour éviter de dénaturer les détentes, on effectue un test de linéarité du champ de vitesse de propagation de cette détente, et on utilisera ici le deuxième jeu de données $\{\psi_i\}$. En effet, si le champ $\{\varphi_i\}$ correspond effectivement à une détente, sachant que le système est hyperbolique homogène, la diagonalisation des flux implique que la composante φ de la solution est solution d'une équation de la forme

$$(9) \qquad \varphi_t \;+\; v\,\varphi_x \;=\; 0\;,$$

où v est une valeur propre de la matrice des flux et correspond à la vitesse de propagation de la détente considérée. On pose

$$(10) \qquad \nu_j \;=\; \frac{\psi_j-\varphi_j}{\Delta t} \quad , \quad \mu_j \;=\; \frac{\gamma_j(\psi) \;+\; \gamma_j(\varphi)}{2}\;,$$

puis

$$(11) \qquad v_j \;=\; \begin{cases} -\frac{\nu_j}{\mu_j} & si\ \mu_j \neq 0 \\ 0 & si\ \mu_j = 0 \end{cases}$$

pour évaluer ensuite $\alpha_j(v)$ et enfin $\beta_j(v)$. Le vecteur $(1, v_j)$ est orthogonal à (ν_j, μ_j) et donc le champ v peut être approché par les v_j. S'il s'agit effectivement d'une détente, le champ v est localement de la forme $\frac{x-x_0}{t-t_0}$, et en particulier une fonction affine de la variable d'espace x. Ceci se traduit par une valeur de $\beta_j(v)$ proche de zéro.

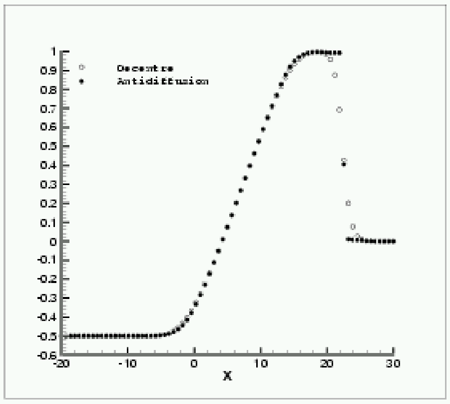
La condition initiale pour le champ de vitesse u est maintenant la suivante

$$(12) \qquad u_i^0 \;=\; \begin{cases} \frac{sg(\beta_j(\varphi))\;|\beta_j(v)|}{\gamma_j(\varphi)}\,\min(k_1|\gamma_j(\varphi)|,\ k_2\,|\beta_j(\varphi)|) & si\ \gamma_j(\varphi)\neq 0, \\ 0 & si\ \gamma_j(\varphi) = 0 \end{cases}$$

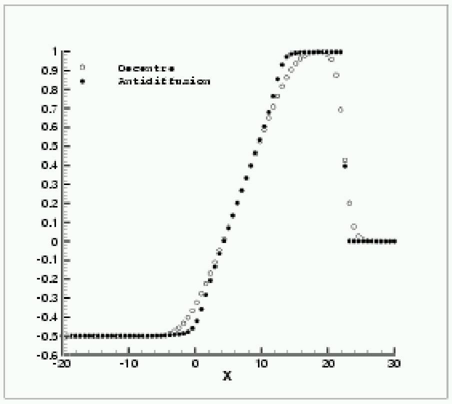
où les coefficients $k_1 > 0, k_2 > 0$ sont des paramètres de contrôle de la méthode (en fait, le choix $k_1 = k_2 = 1$ est largement satisfaisant). Ce champ initial peut éventuellement faire l'objet d'un lissage avant son exploitation dans le schéma.

3 Résultats et conclusions

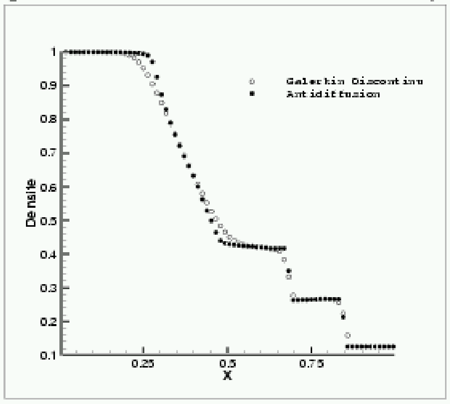
Le procédé a été testé sur une équation scalaire de la forme $q_t + \left(2q + \frac{q^2}{2}\right)_x = 0$ approchée par le schéma décentré de façon très diffusive ($CFL = 0.2$). Les résultats montrent que la raideur du choc est rétablie rapidement (5 cycles) et il faut compter un nombre bien plus important de cycles pour réaliser une bonne correction de la détente. D'autres essais sur d'autres schémas (Lax-Friedrichs, Richtmyer) conduisent aux mêmes observations.



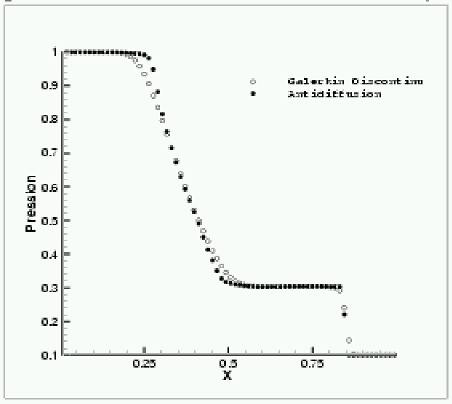
Burgers+Advection - 74 mailles - sch. Décentré $50\Delta t/5\Delta s$



Burgers+Advection - 74 mailles - sch. Décentré $50\Delta t/50\Delta s$



Equ. d'Euler (densité)
74 mailles - sch. Galerkin Discontinu $100\Delta t/20\Delta s$



Equ. d'Euler (pression)
74 mailles - sch. Galerkin Discontinu $100\Delta t/20\Delta s$

Sur les équations d'Euler, le procédé a également été exploité, bien entendu champ par champ, à partir de calculs effectués sur les variables conservatives (densité, moment, énergie totale). On retrouve les mêmes propriétés, avec un nombre de cycles plus réduit en ce qui concerne les détentes. Il faut noter que le procédé est également actif sur la discontinuité de contact, ce qui permet d'envisager son exploitation pour l'amélioration des contrastes (Ref [2]) . Notons également, en ce qui concerne le champ de densité, que le bilan de masse est bien assuré (ceci est garanti par le caractère conservatif de (1)) sans apparition d'instabilités comme le caractère "non strictement hyperbolique" de (1) aurait pu laisser craindre. La méthode peut dégénérer à terme au niveau des détentes lorsque le nombre de cycles de correction excède de façon trop importante le nombre de cyles du calcul préalable, le taux de diffusion accumulée étant alors complètement corrigé.

Sur le plan informatique, une étude approfondie des techniques de pilotage et d'interruption de codes, permettant l'exploitation effective de procédés tels que celui ci, a été réalisée dans [1].

References

[1] C.Domalain, *Pilotage interactif de codes de simulation numérique,* Thèse, Université Bordeaux1, avril 1997.

[2] B.Swartz, *The second Order Sharpening of Blurred Smooth Borders,* Math. of Comp. V52,186, April 1989, pp 675-714.

G.G., AY.LR: GRAMM-Mathématiques, Université Bordeaux1, F-33405 TALENCE.
R.L., J.O.: CEA CESTA, BP 2, F-33114 LE BARP.