

PROJET DE RECHERCHE

5

Intitulé.

Vers des applications réelles des méthodes numériques ALE (Arbitrairement Lagrangien-Eulérien), MOOD (volumes finis de précision élevée) et FKS (cinétique ultra efficace)

Résumé.

Les méthodes numériques de type ALE (maillage mobile), volume finis de précision élevée (MOOD) et cinétiques ultra efficaces (FKS) sont désormais matures pour être implémentées au sein de codes de production dans des institutions ou laboratoires ayant de véritables besoin de simulation, là où un code de simulation est un outil d'expérimentation à part entière. Nous proposons de faciliter cette transition pour trois grands domaines de la physique :

1. la mécanique des fluides et des milieux continus en grandes déformations ;
2. l'astrophysique, la cosmologie, et la physique de l'espace proche ;
3. l'hydrologie et l'hydrologie de surface.

Ces domaines utilisent parfois dans leurs codes des méthodes numériques anciennes, éprouvées, certes robustes mais quelque peu obsolètes. Hors, l'augmentation de la complexité des simulations demande la prise en compte de multiples échelles de temps, d'espace, de modèles, que seules les méthodes numériques les plus performantes sont capables d'appréhender de nos jours.

Nous pensons être à même de proposer des solutions numériques performantes, de les analyser et de les mettre en œuvre dans un cadre adapté aux problèmes physiques (3D, non-structuré, parallèle si besoin) et de démontrer sur les cas représentatifs leur intérêt afin de faciliter leur transition au sein des codes de production. Bien évidemment ces transitions ne se cantonnent pas à une manipulation informatique, mais il s'agit bien de reconsidérer (design, analyse) les méthodes numériques à la lumière de leur futures utilisations.

	Simulation numérique	Astrophysique	Hydrologie
Mots clefs.	Equ./schémas cinétiques	Maillage mobile (ALE)	FCI/Plasma
	HPC	Limiteur Galerkin Discontinu	Précision élevée (VF)

Laboratoire(s) d'accueil possible.

Mon activité pluridisciplinaire est bien adaptée à un laboratoire aux thématiques larges en mathématiques appliquées ou en mécanique des fluides comme

1. *l'Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT)*, Université Paul-Sabatier UMR-5219, Toulouse.

Un deuxième choix, à la vue de mon parcours et des applications envisagées, pourrait être

2. *l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)*, Université Paul-Sabatier UMR-5502, Toulouse.

INTRODUCTION ET CONTEXTE

Depuis mon arrivée à l'Institut de Mathématiques de Toulouse je me suis concentré tout particulièrement sur les développements mathématiques/numériques des méthodes de calcul que mes collaborateurs et moi-même avions en tête. Des codes d'études, quelques codes de simulations et une connaissance plus fine des méthodes numériques ont émergés de ces activités de recherche.

Pour les prochaines années je souhaite fortement m'impliquer dans l'utilisation de ces méthodes numériques pour résoudre des problèmes plus concrets des physiciens, biologistes et/ou industriels. En d'autres mots les connaissances glanées doivent être mises en place dans un ensemble d'outils de simulations utilisables ET utilisés par la communauté scientifique dans sa plus grande généralité. Dans la suite je noterai sous le terme générique "physicien" tout utilisateur potentiel des outils que je pourrais développer. Notez que sous ce vocable je n'exclus ni les sciences humaines ou sociales, ni les STAPS, ni les sciences politiques pour ne citer qu'elles.

Généralement les équations que j'ai eu à étudier et pour lesquelles j'ai développé des outils sont assez générales (systèmes hyperbolique, elliptique, parabolique), sans dimension, rarement avec des termes sources et souvent trop simplifiées pour être totalement pertinentes pour les physiciens. C'est une nécessité pour comprendre les phénomènes physiques "de base" mais aussi les comportements des méthodes numériques associées¹.

Pour caricaturer je me suis jusqu'alors arrêté à ce stade : des modèles d'équations simplifiées et les méthodes/codes numériques associés.

Hors, des interactions avec mes collaborateurs du complexe militaro-industriel (CEA, DGA, Los Alamos) et visites fréquentes chez des physiciens (CELIA-Laser-plasma à Bordeaux, IRAP-Astrophysique à Toulouse, IUSTI-Mécanique des fluides à Marseille, DICAM-Mécanique des fluides/hydrologie à Trento) m'ont fait prendre conscience du fossé existant entre les solutions des mathématiciens appliquées et les besoins des physiciens.

Tous les modèles d'EDPs effectivement utilisés sont enrichis de termes sources souvent raides, de produits non-conservatifs, et autres "amusements" mathématiques et numériques de la sorte. Malheureusement leur présence rend ces modèles uniques, et, en conséquence, les analyses mathématiques et les méthodes numériques spécifiquement dédiées.

De ce fait je propose non pas d'ajouter des thématiques nouvelles à la liste que j'ai déjà développée mais, plutôt, de manager la transition des méthodes/codes que j'ai pu manipuler vers des applications réelles. En ce sens mon projet de recherche va s'articuler autour de grands domaines de la physique pour lesquels les méthodes/codes développés pourraient se révéler utiles².

Les trois thèmes présentés dans mon rapport de recherche à savoir le développement de méthodes numériques sur maillage mobile (ALE), de précision très élevée (MOOD) et cinétique/AP (FKS), me semblent assez matures pour impacter la simulation numériques des domaines suivants :

1. la mécanique des fluides et des milieux continus en grandes déformations ;
2. l'astrophysique, la cosmologie, et la physique de l'espace proche ;
3. l'hydrologie et l'hydrologie de surface.

1. Parfois, même cette version simplifiée est déjà trop complexe pour une analyse mathématique directe.

2. Cependant ce projet ne se restreint pas à ces dernières, en effet au grès des rencontres il arrive que des applications émergentes se révèlent intéressantes, par exemple j'ai la conviction que les applications en médecine et biologie sont proches. Un exemple frappant est le travail de E.F. Toro (mathématicien appliqué en sens français du terme) avec des médecins en Italie et dont le but est de valider par la simulation une "intuition" d'un chirurgien : un lien possible entre l'apparition de sclérose en plaques et une anomalie du système veineux.

Je propose que ce projet de recherche soit toujours piloté depuis **l'Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT)** ou je suis affecté depuis 2006 dans le cadre d'un échange de postes entre les sections 41 (ex-01 mathématiques) et 10. Cette position dans un laboratoire de mathématiques appliquées me permet de rester à l'interface entre mathématiques appliquées (calcul scientifique pour être précis) et les laboratoires de physique (et industriels) avec lesquels je collabore. Ne faisant parti d'aucun laboratoire de physique j'ai une liberté totale dans le choix des thématiques que je traite et, en ce sens, je peux les diriger vers les applications les plus pertinentes sans subir de contraintes naturelles d'un laboratoire avec ses besoins propres.

Cependant je pourrais aisément me fondre dans un laboratoire de l'INSIS en revenant dans la section 10, par exemple à **l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)**. Ce changement de laboratoire ne perturberait que peu le projet de recherche que je propose. Seuls des réajustements pour interagir plus spécifiquement avec l'IMFT ou tout autre laboratoire de l'INSIS seraient nécessaires. Enfin notez qu'un changement de laboratoire pour un laboratoire d'autres sections, par exemple de l'INSU, par exemple l'Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (IRAP) (section 17-18), ne serait pas non plus inintéressant si une volonté du CNRS de créer des ponts entre instituts est toujours prégnante.

L'articulation du projet va mettre en avant des physiciens potentiellement utilisateurs. De plus je présenterai comment je compte engager (et financer en partie) ces nouvelles collaborations/études et à terme proposer des solutions numériques (codes, méthodes) pertinentes pour leurs problèmes et, surtout, en phase avec l'état de l'art.

Détaillons maintenant ce projet en présentant le contexte de ces études et, très succinctement, certaines techniques, modèles ou méthodes numériques sous la forme d'en-cadrés de "rappels". Notez que nous avons volontairement réduit le nombre de formules mathématiques et autres détails techniques qui ne seraient pertinents que pour les quelques spécialistes de ces domaines. *A contrario* nous avons insisté sur le contexte et les raisons pour lesquelles ces études nous semblent pertinentes.

5.1 MÉCANIQUE DES FLUIDES ET DES MILIEUX CONTINUS EN GRANDES DÉFORMATIONS

5.1.1 Mécanique des fluides et élasto-plasticité

Laboratoire/chercheur cibles.

— CEA-DAM DIF, Bruyères-le-Châtel. *Correspondants* : R. Motte, J.-P. Braeunig

Partenaires impliqués ou à impliquer.

— CEA-CESTA (France) : P.-H. Maire, J. Breil

— CVUT (Rép. Tchèque) : M. Kucharik, R. Liska, P. Váchal

— Los Alamos National Laboratory (U.S.A.) : M. Shashkov, D.E. Burton, B. Wendroff

En enrichissant le modèle des équations de la mécanique des fluides compressibles par un modèle dit d'élasto-plasticité (plus précisément d'hypo-élasticité) à plusieurs matériaux dans [26] nous avons fait un pas vers une capacité de simulation pour nos schémas lagrangiens utilisés au sein des codes ALE.

Cependant il serait bienvenu d'étendre cette capacité à l'ensemble du moteur ALE développé ces dernières années pour la mécanique des fluides multi-matériaux. Clairement il reste beaucoup de points délicats à résoudre pour la partie projection d'un code ALE pour prendre en compte ces modèles d'hypo-élasticité (voir l'en-cadré résumé de la page suivante). Nous avons déjà plus ou moins distribué les rôles entre les équipes tchèque [25], française [26] et américaine [P7] afin de répartir la charge de travail. Le travail commence déjà à porter ses fruits d'un point de vue académique mais l'expertise des agents CEA est absolument vitale dans cette aventure. En effet de tels modèles sont à la fois peu étudiés dans l'académie mais aussi particulièrement vicieux à manipuler. Leur expérience sera grandement mise à contribution.

Concernant le financement d'un tel groupe il me semble clair qu'un soutien du CEA-DAM-DIF via des contrats de recherche sera nécessaire ne serait-ce que pour échanger de manière intime sur ces thématiques au moins pour les parties françaises. Pour ce qui concerne la partie tchèque elle possède son financement propre car elle vit proche de physiciens des plasmas et laséristes pour lesquels elle réalise des outils de simulation. Ainsi toute avancée dans le domaine ALE est directement monnayable auprès de leurs physiciens³. Enfin pour ce qui concerne la partie américaine, de même que les tchèques, elle est financée assez largement pour ce type de recherche. Rappelons que le laboratoire de Los Alamos a les mêmes préoccupations que le CEA et, ce qui intéresse l'un, intéresse l'autre de manière systématique.

De manière assez évidente un tel consortium de chercheurs/ingénieurs fonctionnera si la force de travail est suffisante et une embauche (postdoctorant) est fortement envisagée pour la partie française. Un financement reste à trouver en France, sinon le travail sera réalisé à l'étranger (USA fort probablement). Par chance ce consortium n'aura pas à souffrir d'un manque de financement pour ce qui concerne les déplacements de chercheurs et la communication en conférences.

Notez que l'ensemble du consortium est déjà en ordre de bataille et certains résultats ont déjà été obtenus [26,P7].

3. C'est d'ailleurs une des raisons pour laquelle notre collaboration est fructueuse depuis tant d'années.

Rappel : le modèle d'hypo-élasticité de Wilkins.

Following Wilkins the two-dimensional elastic-plastic flow equations in Lagrangian form write

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad \rho \frac{d}{dt} \mathbf{U} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (5.1)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{E} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{U}) = \mathbf{0}. \quad (5.2)$$

Here, $\frac{d}{dt}$ denotes the material derivative, and ρ , \mathbf{U} , E and $\boldsymbol{\sigma}$ are the mass density, velocity, specific total energy and the stress tensor which is a 2×2 symmetric matrix. The stress tensor is decomposed into a hydrostatic component P and a deviator component S by setting $\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I}_d + S$, where P denotes the hydrodynamic pressure and \mathbf{I}_d is the unit tensor in \mathbb{R}^2 . The thermodynamic closure of the previous system is achieved by means of an equation of state which describes elastic, elastic-plastic and hydrodynamic flow. An appropriate yield criteria is also included in the latter two regimes. The equation of state for the hydrostatic component is written under the following form $P = \mathcal{P}(\rho, \varepsilon)$, where $\varepsilon = E - \frac{1}{2}\mathbf{U}^2$ denotes the specific internal energy. The equation of state for the deviator component is written in terms of an incremental strain as

$$\frac{d}{dt} S = 2\mu \left[D - \frac{1}{3} \text{Tr}(D) \mathbf{I}_d \right] - (SW - WS). \quad (5.3)$$

Here, μ is the Lamé coefficient which is material dependent, D denotes the strain rate tensor whereas W is the spin tensor. These tensors correspond respectively to the symmetric and antisymmetric part of the velocity gradient

$$D = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^t), \quad W = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} - \nabla \mathbf{U}^t), \quad (5.4)$$

where the superscript t denotes the matrix transpose. With these definitions, the trace of the strain rate tensor corresponds to the divergence of the velocity, that is $\text{Tr}(D) = \nabla \cdot \mathbf{U}$. The last term in the incremental stress-strain relationship ensures that the constitutive law obeys the principle of material frame independence.

That is the tensor-valued functions that relates stress to deformation measure must transform correctly under a change of basis and change of origin for the coordinate system. We note that the introduction of this supplementary term amounts to write the time rate of change of the deviator component using the Jauman derivative which reads

$$\hat{\frac{d}{dt}} S = \frac{d}{dt} S + (SW - WS). \quad (5.5)$$

The yield criteria is prescribed using the Von-Mises yield condition as follows $\text{Tr}(S^2) \leq \frac{2}{3}(\gamma^0)^2$, where γ^0 is the yield strength which is material dependent. This criteria means that if an incremental change in the stress results in a violation of the previous inequality, then the stress deviator must be adjusted. We recall that for smooth elastic flows, the time rate of change of specific entropy s is given by the Gibbs relationship

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\varepsilon}{dt} - \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} D). \quad (5.6)$$

In case of non-smooth transformations such as shock waves, the thermodynamic consistency of the aforementioned model is ensured by the fundamental inequality

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} - \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} D) \geq 0. \quad (5.7)$$

This corresponds to the second law of thermodynamics, which ensures that through a shock wave kinetic energy is dissipated into internal energy. We remark that if we set $S = 0$, we recover the classical equations of Lagrangian hydrodynamics.

5.1.2 Elasto-plasticité en grandes déformations**Laboratoire/chercheur cibles.**

- CNES Toulouse, ONERA Toulouse/Châtillon, CEA, DGA. *Correspondants : pas de correspondant contacté*
- IUSTI (Marseille) : S.Gavriluk

Partenaires impliqués ou à impliquer.

- CEA-CESTA (France) : P.-H. Maire
- CHLOE, université de Pau, (France) : I. Peshkov
- Trento (Italie) : W.Boscheri, M.Dumbser
- Sobolev Institute of Mathematics of Novosibirsk (Russie) : E. Romenski

L'application de nos codes et méthodes ALE à la mécanique des milieux continus sous fortes contraintes et en grande déformation est ambitieuse mais pas dénuée de sens. Nous pensons en particulier aux phénomènes de type sollicitation dynamique intense, impacts hypervéloces, interaction fluide/structure et la modélisation de l'endommagement des matériaux qui en découle.

Par exemple le CNES s'intéresse au devenir des débris de satellite qui orbitent autour de la terre. Ils représentent des objets relativement petits (de l'ordre du mm-cm) mais lancés à des très grandes vitesses (de l'ordre de plusieurs km/s) dont les effets sur les panneaux solaires et structures de satellites peuvent être catastrophiques. D'ailleurs à une toute autre échelle l'impact de météorite

sur la terre est une autre application qui mettrait en jeu les mêmes types de phénomènes mais des matériaux et des échelles différentes. De même l'ONERA et le CEA s'intéressent au devenir de leurs corps de rentrés dans l'atmosphère sous contrainte d'ablation thermique.

Ces phénomènes mettent en œuvre une quantité impressionnantes de processus physiques (onde de choc, détente, glissement, impact), de processus de transfert (thermique, radiatif, d'énergie cinétique, endommagement, ablation), de modèles de comportement (élastique, visco-élastiques, plastiques), de matériaux, etc.

Il s'agit pour nous de confronter notre méthode à maillage mobile et reconnections topologiques à une complexification des modèles et des couplages entre processus physiques. Ces derniers devant être résolus par des schémas numériques appropriés. Le couplage entre différentes méthodes numérique associées à différents modèles couplés par des termes sources ou des lois de comportement présente une véritable gageure pour toute méthode numérique. Même s'il ne s'agit pas à proprement parlé d'une "application" bien identifiée par un laboratoire ou un collaborateur, il n'en reste pas moins que la résolution de ces types de couplage de codes/méthodes est à la base de toute augmentation de la complexité dans la simulation de phénomènes physiques intenses et couplés. Parallèlement nous participons au projet ANR-ASTRID SNIHYPER (Simulation Numérique des Impacts HYPERvéloces) accepté en 2014 et mené par S. Gavriluk (IUSTI, Marseille) pour lequel ces thématiques sont en cours d'étude.

Un aspect très intéressant et récent dans le domaine de la modélisation consiste en l'avènement de modèles hyperboliques unifiés du premier ordre pour la mécanique des milieux continus (depuis les fluides visqueux jusqu'aux solides élastiques). Le modèle dit de Peshkov-Romenski-Godunov [A hyperbolic model for viscous Newtonian flows, I Peshkov, E Romenski, Continuum Mech. and Therm., 2014] est particulièrement attractif et nous souhaitons l'analyser et le résoudre numériquement, voir l'en-cadré suivant rappelant les grandes lignes de ce modèle.

Un tel modèle a récemment été résolu dans un cadre de maillage fixe en 3D par l'équipe de M. Dumbser aidée par I. Peshkov et E. Romenski. Cependant sa validation numérique demande encore de nombreux travaux pour correctement définir les conditions aux limites appropriées, les noyaux de résolutions les plus adaptés, etc. De plus sa résolution sur maillage mobile serait un plus certain, ce que nous pensons pouvoir faire.

Ces études sont à considérer comme des études "amonts" et, en ce sens, nous pensons construire un consortium de mathématiciens/ingénieurs (P.-H. Maire, F. Vilar, M.Dumbser) et mécaniciens (moi même, S.Gavriluk, I.Peshkov, E.Romenski) pour traiter et analyser les aspects les plus théoriques des couplages de modèles et leur résolution numérique.

Modèle de Peshkov-Romenski-Godunov. Ce système unifié prend la forme suivante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} = 0, \quad (5.8a)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \sigma_{ik})}{\partial x_k} = 0, \quad (5.8b)$$

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial A_{im} v_m}{\partial x_k} + v_j \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} \right) = - \frac{\psi_{ik}}{\theta_1(\tau_1)}, \quad (5.8c)$$

$$\frac{\partial \rho J_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho J_i v_k + T \delta_{ik})}{\partial x_k} = - \frac{\rho H_i}{\theta_2(\tau_2)}, \quad (5.8d)$$

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial (\rho s v_k + H_k)}{\partial x_k} = \frac{\rho}{\theta_1(\tau_1) T} \psi_{ik} \psi_{ik} + \frac{\rho}{\theta_2(\tau_2) T} H_i H_i \geq 0, \quad (5.8e)$$

La solution de ce système vérifie l'équation de conservation de l'énergie totale

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (v_k \rho E + v_i (p \delta_{ik} - \sigma_{ik}) + q_k)}{\partial x_k} = 0, \quad (5.9)$$

Les notations (non classiques) sont $[A_{ik}] = \mathbf{A}$ le tenseur de distorsion $[J_i] = \mathbf{J}$ le vecteur d'impulsion thermique s l'entropie $E = E(\rho, s, \mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{J})$ l'énergie totale $p = \rho^2 E_\rho$ la pression δ_{ik} le symbole de Kronecker, $[\sigma_{ik}] = \boldsymbol{\sigma} = -[\rho A_{mi} E_{A_{mk}}]$ est le tenseur symétrique des contraintes visqueuses, $T = E_s$ la température, $[q_k] = \mathbf{q} = [E_s E_{J_k}]$ est le flux de chaleur et $\theta_1 = \theta_1(\tau_1) > 0$ et $\theta_2 = \theta_2(\tau_2) > 0$ sont des fonctions scalaires dépendant du taux de dissipation $\tau_1 > 0$ et du temps de relaxation de l'impulsion thermique $\tau_2 > 0$. Les termes de dissipation ψ_{ik} et H_i sont définis par $[\psi_{ik}] = \boldsymbol{\psi} = [E_{A_{ik}}]$ et $[H_i] = \mathbf{H} = [E_{J_i}]$. Le tenseur des contraintes et le flux de chaleur sont liés via $\boldsymbol{\sigma} = -\rho \mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi}$ and $\mathbf{q} = T \mathbf{H}$. $E_\rho, E_s, E_{A_{ik}}$ et E_{J_i} sont les dérivés partielles $\partial E / \partial \rho, \partial E / \partial s, \partial E / \partial A_{ik}$ and $\partial E / \partial J_i$. Ces équations expriment la conservation de la masse (5.8a), de la quantité de mouvement (5.8b), l'évolution de la distorsion (5.8c), l'évolution de l'impulsion thermique (5.8d), l'évolution de l'entropie (5.8e), et la conservation d'énergie totale (5.9). Pour fermer le système il est nécessaire de définir le potentiel d'énergie totale $E(\rho, s, \mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{J})$. Ce potentiel engendre tous les flux constitutifs et les termes sources (à l'aide de dérivées par rapport aux variables d'état).

Cette définition est donc fondamentale, on considère trois échelles, microscopique (moléculaire), mesoscopique (éléments des matériaux) et macroscopique (fluides)

$$E(\rho, s, \mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{J}) = E_1(\rho, s) + E_2(\mathbf{A}, \mathbf{J}) + E_3(\mathbf{v}).$$

L'énergie cinétique spécifique par unité de masse donne $E_3(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} v_i v_i$ L'énergie interne $E_1(\rho, s)$ est liée à l'énergie cinétique du mouvement moléculaire, par exemple une équation d'état de gaz parfait peut être utilisée (ou encore stiffened gaz ou Mie-Grüneisen). On utilise pour la partie mesoscopique

$$E_2(\mathbf{A}, \mathbf{J}) = \frac{c_s^2}{4} G_{ij}^{\text{TF}} G_{ij}^{\text{TF}} + \frac{\alpha^2}{2} J_i J_i, \quad (5.10)$$

avec $[G_{ij}^{\text{TF}}] = \text{dev}(\mathbf{G}) = \mathbf{G} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{G}) \mathbf{I}$, and $\mathbf{G} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$. $[G_{ij}^{\text{TF}}] = \text{dev}(\mathbf{G})$ est le déviateur du tenseur $\mathbf{G} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ et $\text{tr}(\mathbf{G}) = G_{ii}$ sa trace. c_s est une vitesse caractéristique de propagation des perturbations transversales. La vitesse caractéristique des ondes de chaleur c_h est lié à la valeur α ($\text{kg}/(\text{K} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2)$). Dès que E est défini tous les flux et termes sources ont une forme explicite et pour l'énergie $E_2(\mathbf{A}, \mathbf{J})$ donnée par (5.10), on a $\boldsymbol{\psi} = E_A = c_s^2 \mathbf{A} \text{dev}(\mathbf{G})$, donc le tenseur des contraintes est donné par $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$

$$\boldsymbol{\sigma} = -\rho \mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi} = -\rho \mathbf{A}^T E_A = -\rho c_s^2 \mathbf{G} \text{dev}(\mathbf{G}),$$

et le terme source de dissipation devient

$$\frac{\boldsymbol{\psi}}{\theta_1(\tau_1)} = \frac{E_A}{\theta_1(\tau_1)} = \frac{3}{\tau_1} |\mathbf{A}|^{\frac{5}{3}} \mathbf{A} \text{dev}(\mathbf{G}),$$

où on a choisit $\theta_1(\tau_1) = \tau_1 c_s^2 / 3 |\mathbf{A}|^{-\frac{5}{3}}$, avec $|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) > 0$. On peut montrer que ce modèle est compatible avec le premier et second principe de la thermodynamique et cela implique qu'il est hyperbolique. Le problème de Cauchy est donc bien posé, ce qui en fin de compte est utile pour écrire/réutiliser une méthode numérique adaptée.

5.2 ASTROPHYSIQUE, COSMOLOGIE ET PHYSIQUE DE L'ESPACE PROCHE

Pour cette section l'ensemble des codes et méthodes que je développe pourraient trouver leur place. Je classe donc les codes de simulations et la place qu'ils pourraient prendre.

5.2.1 Codes FKS et AP

Laboratoire/chercheur cibles.

- CEA-CESTA. *Correspondants* : P.-H. Maire
- Computer Science and Mathematics Division, Oak Ridge National Laboratory, TN, U.S.A.
Correspondants : C. Hauck

Partenaires impliqués ou à impliquer.

- Institut de Mathématiques de Toulouse (France) : M.-H. Vignal, J. Narski, V. Rispoli
- Università degli Studi di Ferrara (Italie) : G. Dimarco
- Université de Lille (France) : T. Rey

Noyau de collision de Boltzmann

Nous envisageons une extension de nos travaux sur les méthodes cinétiques pour le noyau de collision BGK vers un noyau de Boltzmann. Ce dernier est souvent considéré comme trop coûteux pour réaliser des simulations en $3D \times 3D$ mais nous pensons que cela est désormais inexact. de ce fait avec J. Narski, G. Dimarco et T. Rey nous pensons discrétiser le noyau de Boltzmann par une méthode spectrale rapide, voir l'en-cadré de rappel suivant, et ensuite inclure cette discrétisation dans notre code 3D FKS parallélisé sous MPI. Rappelons que nous avons une version OpenMP et GPU (Cuda) de ce code 3D, donc un travail de HPC va devoir être réalisé en plus du travail d'analyse de la méthode spectrale adéquate (voir l'en-cadré suivant). Nous pensons faire une demande de projet auprès du Labex CIMI pour fédérer une équipe de développeurs et d'ingénieurs calcul (de l'IMT mais aussi de CALMIP le méso centre de calcul en midi-pyrénées) afin de rendre ce futur outil de calcul performant sous tout type de plate-forme de calcul ; du cluster de bureau jusqu'aux méso/macro- centres de calcul nationaux et européens.

HPC

Le schéma FKS (Fast Kinetic Scheme, cinétique ultra-efficace) a été développé pour pouvoir simuler en $3D \times 3D$ avec des ressources de calcul raisonnables, c'est-à-dire dans un laboratoire académique en Europe. Nous avons montré dans [35] que le code FKS 3D se révèle *embarrassingly parallel* (terme consacré en parallélisme signifiant que le passage à l'échelle en nombre de processeurs est quasi-parfait). Ce résultat intéresse certains chercheurs/ingénieurs en particulier C. Hauck du laboratoire Oak Ridge National Laboratory dans le Tennessee qui a rencontré G. Dimarco lors d'une conférence. Ce dernier nous a proposé d'implémenter le schéma FKS dans un cadre massivement parallèle afin d'éprouver sa robustesse. Nous avons entamé une collaboration et nous espérons pouvoir développer un consortium associé aux problématiques à Oak Ridge (énergie, sciences de la terre, chimie et matériaux).

Rappel : discrétisation du noyau de collision de Boltzmann par une méthode spectrale (rapide).

L'équation de Boltzmann s'écrit

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \frac{1}{\varepsilon} Q(f) \quad (5.11)$$

$f = f(x, v, t) > 0$ est la fonction de distribution des particules en position $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, au temps $t > 0$ se déplaçant à la vitesse $v \in \mathbb{R}^d$. L'opérateur de collision de Boltzmann Q est un opérateur local quadratique en (t, x)

$$Q(f)(v) = \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}} B(|v - v_*|, \cos \theta) (f'_* f' - f_* f) d\sigma dv_*$$

où $f = f(v)$, $f_* = f(v_*)$, $f' = f(v')$, $f'_* = f(v'_*)$ et les paires de vitesse (v, v_*) et (v', v'_*) sont liées par

$$\left. \begin{array}{l} v' \\ v \end{array} \right\} = v - \frac{1}{2}((v - v_*) \pm |v - v_*| \sigma),$$

Le noyau de collision B est non négatif et dépend uniquement de $|v - v_*|$ et $\cos \theta = u \cdot \sigma$ où $u = (v - v_*)$. on considère généralement le modèle *Hard sphere* $B(u, \cos \theta) = |u|$ ou *Variable Hard sphere* $B(u, \cos \theta) = C_\gamma |u|^\gamma$, pour $0 < \gamma \leq 1$ et C_γ une constante. Les moments macroscopiques ρ , v and T sont des fonctions de f

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^3} f(v) dv, \quad u = \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}^3} v f dv, \quad \theta = \frac{1}{3\rho} \int_{\mathbb{R}^3} \|u - v\|^2 f dv$$

Afin de discrétiser un tel opérateur on le réécrit sous la forme générale

$$Q(f) = \int_C \mathcal{B}(y) [f'_* f' - f_* f] dy, \quad v \in \mathbb{R}^d, \quad (5.12)$$

avec $v' = v + \Theta(y)$, $v'_* = v + \Theta_*(y)$ and $v_* = v + \Theta_*(y)$ et C un domaine dans lequel vit y et Θ des fonctions à définir. Cette forme met en exergue la propriété d'invariance par translation qui est importante pour mettre en place une méthode spectrale.

La version sur des domaines tronqués périodiques devient

$$Q^R(f) = \int_{C_R} \mathcal{B}(y) [f'_* f' - f_* f] dy, \quad v \in \mathbb{R}^d, \quad (5.13)$$

On commence ensuite par tronquer l'opérateur Q dans l'espace des vitesses puis on utilise un développement de la fonction de distribution en séries de Fourier $f_N(v) = \sum_{|k| < n} \hat{f}_k e^{i \frac{2\pi}{L} k \cdot v}$ avec les coefficients de Fourier \hat{f}_k . Ces coefficients obéissent à un ensemble d'EDO

$$Q^R(f_N) = \sum_{|l| \leq n} \sum_{|m| \leq n} \hat{\beta}(l, m) \hat{f}_l \hat{f}_m e^{i \frac{2\pi}{L} (l+m) \cdot v},$$

où les modes $\hat{\beta}(j, m)$ du noyau sont donnés par

$$\hat{\beta} = \int_{C_R} \mathcal{B}(y, z) \left[e^{i \frac{2\pi}{L} (l \Theta'(y) + m \Theta'_*(y))} - e^{i \frac{2\pi}{L} (m \Theta_*(y))} \right] dy$$

L'équation spectrale correspond à la projection sur P_N de l'équation de collision. Ecrit sur les coefficients de Fourier cela devient

$$\frac{\partial \hat{f}_k}{\partial t} = \sum_{l+m=k, |l|, |m| \leq n} \hat{\beta}(j, m) \hat{f}_l \hat{f}_m$$

La méthode spectrale rapide met ensuite en oeuvre l'utilisation de FFT (Fast Fourier Transform) sur une formulation du noyau de collision un peu différente qui let en avant de meilleures propriétés de découplément entre les arguments de l'opérateur. Sans entrer dans les détails techniques dans le cas $d = 2$ et des molécules Maxwelliennes ou $d = 3$ avec des molécules sphères dures alors un calcul numérique du noyau de Boltzmann est envisageable, même si ce dernier reste coûteux.

En couplage avec FKS 3D×3D il s'agit d'une avancée majeure.

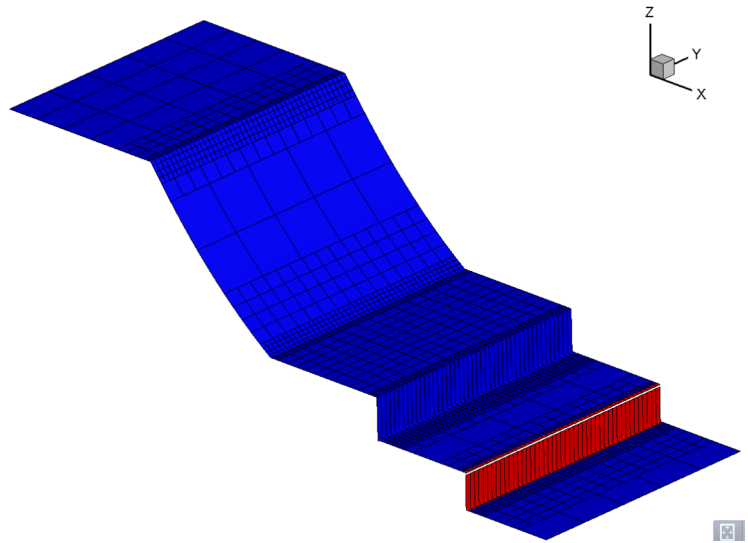
Adaptation de maillage en vitesse

Dans un contexte sensiblement différent nous avons montré que le schéma FKS peut traiter efficacement des simulations de corps de rentrée. De plus en utilisant une méthode de décomposition de domaine automatique qui permet de marier deux zones de calcul (cinétique et fluide), chacune avec son modèle et chacune avec sa méthode de résolution [35,Pr5]. Ce type de phénomènes est rencontré dans les applications d'entrée de satellites ou de capsule dans l'atmosphère planétaire (terre, mars). Le complexe militaro-industriel français (CEA-CESTA, DGA,) ou les laboratoires d'ingénierie satellitaire pourraient se montrer intéressés par un tel code de calcul. Pour cela la capacité à traiter des objets et des conditions aux limites plus complexes a été étendue au 3D dans [35] et nous bénéficions d'un véritable outil de démonstration. D'ailleurs si le complexe militaro-industriel se montre intéressé nous pourrions monter en partenariat un projet ASTRID (accompagnement spécifique des travaux de recherches et d'innovation défense). Une dernière évolution en cours de ce code de simulation est la mise en place d'une version AMR (*Adaptive Mesh Refinement*) en vitesse. Cette évolution en cours en 2D et 3D devrait voir le jour prochainement et nous serions alors en mesure d'adapter des versions du code à des applications spécifiques en espérant convaincre les utilisateurs de l'applicabilité de notre approche.

Rappel : raffinement adaptatif de maillage (AMR).

Il s'agit d'une technique numérique qui permet d'utiliser des mailles très fines proches de zones d'intérêt et des mailles très grossières dans des zones "calmes". Ce faisant on maintient la même précision que l'on obtiendrait sur un maillage régulier à N mailles avec le coût réduit d'une méthode sur $n \ll N$ mailles. Par exemple à droite on peut observer le type de maillage raffiné autour des discontinuités et dé-raffiné dans les plateaux et profils réguliers (calcul d'hydrodynamique à trois niveaux de raffinement, maillage initial 20×5).

Dans un cadre cinétique, tout gain en terme de CPU aura un impact "gigantesque" puisque nos simulations sont/seront réalisées en $3D \times 3D$.



5.2.2 Schémas préservant l'asymptotique

De plus les phénomènes physiques envisagés oscillent souvent entre deux situations extrêmes représentées par deux modèles distincts (cinétique ou fluide, faible ou fort nombre de Mach, transparent ou opaque par exemple). Les méthodes numériques capables de résoudre ces deux extrêmes sont rares. Pourtant les méthodes numériques préservant l'asymptotique (AP) sont des solutions attrayantes puisque ces dernières permettent de capturer les limites des deux modèles sans avoir à satisfaire des contraintes drastiques de stabilité. L'équipe de l'IMT qui s'occupe des méthodes AP sera la bienvenue pour conseiller les physiciens dans la discrétisation de leurs modèles. Il nous faut continuer à développer et tester en 3D les idées de M.-H. Vignal [Pr2] afin de rendre ce schéma bas Mach et AP le plus performant possible. Ceci ne sera prouvé que lorsqu'un démonstrateur 3D sur les équations de l'hydrodynamique sera disponible. Notez que ces thématiques de schémas AP sont très proches des considérations de l'IRAP (Toulouse) et ces derniers pourraient se joindre au consortium.

5.2.3 Code MOOD

Laboratoire/chercheur cibles.

- University of Notre Dame's College of Science, Department of Applied and Computational Mathematics and Statistics, Notre Dame, IN, U.S.A. *Correspondant : D Balsara (professeur)*

Partenaires impliqués ou à impliquer.

- Los Alamos National Laboratory (U.S.A.) : S. Diot
- Universidade do Minho, Braga (Portugal) : S. Clain
- Università degli Studi di Trento (Italie) : M. Dumbser, E.F. Toro
- Universität Stuttgart (Allemagne) : C.D. Munz
- Université du Michigan (U.S.A.) : P. Roe
- Université da Coruna (Espagne) : X. Nogueira

Les codes volumes finis sous paradigme MOOD commencent à être testés par plusieurs équipes (Italie, U.S.A, Portugal, Espagne et France). En association avec M. Dumbser nous avons montré

dans [32,33] que MOOD pouvait simuler des problèmes de magnéto-hydrodynamique relativiste en 3D avec de meilleures performances que l'état de l'art.

Dès lors D. Balsara à Notre Dame aux U.S.A. un spécialiste de la simulation de problèmes impliquant des modèles de MHD a adopté le paradigme MOOD. D. Balsara travaille de fait avec un grand nombre de d'astro-physiciens (départements de physiques de l'université de Hawaii, de Notre Dame, etc.). Une collaboration est dans les faits en cours entre le groupe à l'origine de MOOD (S. Diot, S. Clain et moi même) et le binôme M. Dumbser, D. Balsara, des collaborateurs de longue date. Nous ne participerons probablement qu'en tant qu'experts de MOOD puisque ces groupes possèdent déjà leurs énormes codes de calcul. Cependant il nous faudra adapter MOOD aux exigences de tels codes en termes de couplages de modèles et de schémas numériques.

Le financement de telles collaborations n'a pas vraiment lieu d'être pour l'instant car chaque entité possède ses fonds propres. Avec l'aide d'un étudiant en thèse avec M. Dumbser nous avons entre Trento (Italie) et Toulouse développé la faisabilité de traiter des termes sources raides et des produits non-conservatifs avec MOOD [Pr4], des thématiques utilisables dans le consortium. De plus nous espérons pouvoir associer cet étudiant avec les astrophysiciens de Notre Dame afin de maintenir le schéma MOOD au sein des codes de production sur place. Dans le cas (probable) où les résultats seraient prometteurs on envisagera l'embauche d'un postdoctorant sur les mêmes thématiques entre les U.S.A et l'Europe. Si notre collaboration est aussi fructueuse que prévue, nous pourrions à terme mettre en œuvre des échanges plus fréquents entre les équipes via un appel d'offre de la NASA par exemple. Cela reste du domaine des possibles en 2015.

Notez que les développements réalisés dans les codes des astrophysiciens de Notre Dame pourront être transférés vers les codes des astrophysiciens du CEA-Saclay, de l'IRAP (Toulouse) ou du CELIA (Bordeaux) si ces laboratoires se montrent intéressés. En effet les avancées sur les méthodes numériques de précision élevée seront utilisables dans tout code de calcul fondé sur les paradigmes MOOD.

5.2.4 Codes ALE

Laboratoire/chercheur cibles.

- Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (IRAP), Géophysique Planétaire et Plasmas Spatiaux (GPPS). *Correspondants* : B. Lavraud

Partenaires impliqués ou à impliquer.

- CEA-CESTA : P.-H. Maire, J.Breil

Les codes de calcul ALE sont régulièrement utilisés en astrophysique (AREPO (Garching, All. et Harvard U.S.A.), BETHE-hydro (Univ. of Arizona, U.S.A.), DJEHUTY (LLNL, Livermore, U.S.A.), etc.). Notre connaissance avancée de ces codes de simulation pour l'hydrodynamique multi-matériaux sur maillage mobile est clairement utilisable dans un contexte de modèles d'hydrodynamique radiative, de magnéto-hydrodynamique ou de Vlasov tels que ceux rencontrés en astrophysique ou physique de l'espace.

En particulier le code AREPO (www.mpa-garching.mpg.de/~volker/arepo/) est dans sa construction très proche de notre approche ReALE (ALE avec reconnection) que nous devrions pouvoir réutiliser dans un contexte de simulation d'astrophysique. Mes contacts au sein de l'IRAP sont intéressés par une collaboration qui serait fondée sur un rôle d'expertise des méthodes numériques et codes de calcul de notre côté et un rôle de spécialiste des modèles (et de l'infrastructure informatique propre à leur institut) du leur. Il s'agit pour nous d'assimiler dans notre plate-forme de calcul ALE l'ensemble des opérateurs et autres entités qui vont émerger de leurs

modèles.

Dans ce cadre nous sommes en contact avec B. Lavraud de l'IRAP (Toulouse) et ses collègues qui travaillent entre autre sur la reconnection de la magnétosphère sous influence du vent solaire. La reconnection magnétique est un phénomène qui prend sa source à l'échelle des électrons et de leur mouvement pour finalement impacter des échelles de plusieurs ordre de grandeur plus grandes. Un calcul à l'échelle électronique n'est envisageable pour une minuscule portion du domaine de calcul. Le reste du domaine devant être traité par un modèle/maillage plus grossier (et moins coûteux) : il s'agit donc de marier outre les méthodes ALE avec reconnection de maillage et des méthodes plus basiques (volumes/différences finies) mais aussi les méthodes numériques AP voire la décomposition de domaine mise en place pour les schémas cinétiques.

Pour confronter les modèles théoriques (et aussi les codes de simulation les émulant) les physiciens disposent d'un grand nombre de données satellitaires. D'ailleurs la mission spatiale MMS (Magnetospheric Multi-Scale (Mission NASA lancée fin 2014), 4 satellites à 10 km de distance pour mesurer l'échelle électronique des sites de reconnection magnétique dans la magnétosphère terrestre) est en partance pour recueillir des données sur ces reconnections magnétiques. Fournir aux physiciens un code de simulation efficace de ces phénomènes semble donc être une idée non dénuée de sens.

Nous envisageons une collaboration plus soutenue pour apporter notre connaissance sur les codes de simulations de type ALE avec reconnection, FKS et AP pour tenter d'utiliser au mieux ces méthodes en prenant en compte les contraintes opérationnelles liées au contexte astrophysique.

5.3 HYDROLOGIE ET HYDROLOGIE DE SURFACE

Pour toutes les applications en hydrologie et hydrologie de surface nous comptons sur notre expérience en mécanique des fluides compressibles, maillage et développement de code pour apporter une expertise. Cependant il s'agit d'une nouvelle thématique qui mène si elle reste connexe à mes activités demandera l'apport d'experts du domaine.

Laboratoire/chercheur cibles.

- DICAM Laboratory of Applied Mathematics, Department of Civil, Environmental and Mechanical Engineering, Trento, Italie. *Correspondants : M. Dumbser, W. Boscheri, V. Casulli*

Partenaires à impliquer.

- IMFT (Toulouse), IMT (Toulouse),

Récemment j'ai pu apprécier les travaux de V. Casulli pour ce qui touche à la simulation de l'hydrologie de surface réalisée par l'équipe italienne au DICAM et leurs collaborateurs à Trento. Une partie de leur activité se tourne vers la plaine de la rivière Pô et son étude. Leurs besoins en terme de simulation numérique est important et il semble qu'une partie de nos études sur les schémas VF et DG de précision élevée soient utilisables assez directement. Nous avons d'ailleurs commencé à travailler sur l'utilisation de maillage de Voronoi dans les discretisations volumes finis conservatifs de précision élevée en 2D sur maillage non structuré pour le schéma numérique de V. Casulli. Ce travail commencé avec W. Boscheri devrait, s'il aboutit, donner lieu à de nouvelles possibilités pour les codes de calculs actuellement utilisés (et qu'il faudra donc mettre à jour).

De plus nous envisageons de mettre en place les technologies sur maillages mobiles et lignes de glissement à ces thématiques. Même si les schémas numériques eulériens sont souvent préférés pour ce type d'applications, nos technologies sur maillage mobile pourraient se révéler plus puissantes dans des applications très spécifiques (suivi de polluant ou d'interface par exemple).

Cette nouvelle thématique autour de l'hydrologie de surface ne se développera que si nos résultats sont probants par rapport à l'état de l'art. De ce fait nous allons commencer par travailler, développer et tester sérieusement nos approches avant de nous connecter avec des équipes existantes sur ces thématiques. Notez que le DICAM est déjà en collaboration avec des hydrauliciens, ingénieurs et responsables locaux car la plaine du Pô est une zone sensible en Italie. De ce fait la présence de nombreux collaborateurs ne nous semble ni utile ni nécessaire pour l'instant.

5.4 DIVERSES AUTRES THÉMATIQUES

En vrac plusieurs autres thématiques restent d'actualité et pourrait "exploser" même si peu d'énergie est pour l'instant investie dans ce but (surtout par manque de force de travail).

Limiteur pour les codes DG. Le limiteur *a posteriori* pour les méthodes DG nous ouvre un nouveau monde de possibles collaborateurs contactés et intéressés par exemple C.W. Shu (Brown, USA), C.D. Munz (Stuttgart, Allemagne), F. Bassi (Bergame, Italie), Kopriva (Florida State, USA), etc. Tous ont travaillé ou travaillent toujours sur cette thématiques et nous pensons avoir apporté dans [33] une solution innovante. C.D. Munz et son groupe à Stuttgart ont déjà implémenté leur version et le groupe semble satisfait des résultats. En fonction de l'évolution dans un futur proche nous pourrions investir du temps pour communiquer plus sérieusement sur cette thématique dans le but de "recruter" un groupe de véritables utilisateurs. En effet les méthodes DG sont utilisées dans de nombreux domaines de la physique (prédiction du climat, météo, plasma, phénomènes de transport en milieux poreux, etc.).

Reconstruction d'interfaces et maillage de Voronoi. Depuis longtemps je manipule des maillages de Voronoi pour mes application 2D en ALE. Ce type de maillage a des propriétés très intéressantes que nous pensons mettre en œuvre pour les schéma de V. Casulli par exemple (voir ci-dessus dans le paragraphe "Hydrologie et hydrologie de surface"). De même les études menées sur la reconstruction d'interface et les phénomènes de glissement de maillage [14,17,22,25,34] se révèlent être partagés par de grands nombres de domaines de la physique. Pour ce qui me concerne ils n'ont été utilisés que dans un monde mécanique des fluides compressibles multi-matériaux en ALE mais beaucoup de discussions montrent qu'ils pourraient être utiles à d'autres groupes de recherche (codes multiphasiques pour e citer qu'un exemple).

Intersection de maillages 3D. Nous avons développé une boîte noire d'intersection de maillages polyédriques généraux avec un ex-postdoc G. Blanchard dans [Pr2] et [Pr8]. Cette intersection a été couplée à une méthode de projection conservative et très précise (reconstruction polynomiales de champs centrés avec limiteur *a posteriori*).

Ce projet est quasi finalisé et désormais un outil efficace d'intersection de maillage est disponible pour la communauté scientifique. Cet outil peut servir pour transférer de l'information d'un code de calcul à un autre, pour initialiser des simulations et aussi pour tout ce qui touche au monde de l'ALE avec ou sans reconnection topologique de maillage.

Les domaines de la FCI pourraient bénéficier de ces avancées dès lors que cette technologie est incluse dans un code ALE de mécanique des fluides compressibles avec les modules de physiques *ad hoc* (élasto-plasticité, neutronique, etc.).

Schéma lagrangien 2D de précision élevée. Un schéma de discrétisation sur maillage mobile pour la mécanique des fluides compressible en 2D et de précision au delà de 2 ne sont pas légion. Dans ce cadre les arêtes d'une maille se déforment elles aussi au cours du calcul : un triangle initial évolue en un objet dont les arêtes sont des polynômes. Quand de tels schémas existent, leur robustesse laisse parfois à désirer. Si la robustesse est acquise, alors la précision est souvent sacrifiée.

Nous avons commencer de notre côté à mettre en œuvre un schéma lagrangien 2D sur les paradigmes ADER et MOOD pour marier les deux composantes. Ce travail en cours avec P.H. Maire,

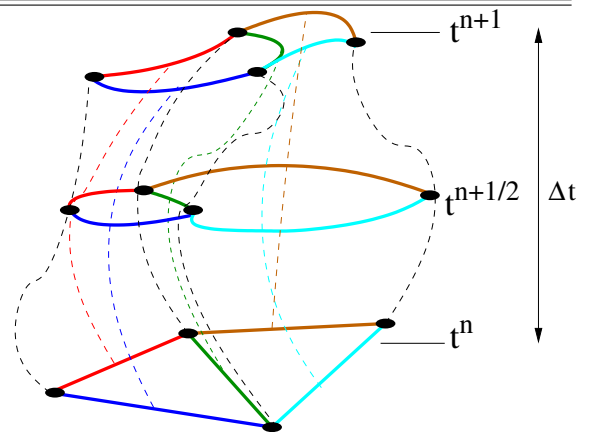
W. Boscheri et M. Dumbser, s'il aboutit, devrait proposer une solution innovante à ce problème.

Maillage courbes.

Lorsqu'un champ de déplacement n'est plus simplement linéaire alors un triangle initial devient un objet à bords courbes. Cependant dans une formulation VF ou GD, et pour les méthodes numériques associées, il s'agit de définir un flux au travers de d'une arête entre deux mailles ω_i et ω_j

$$\mathbf{F}_{i,j} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\partial\omega_i \cap \omega_j} \mathbb{F}(U_L(s,t), U_R(s,t)) \cdot n(s,t) ds dt,$$

où U_L, U_R sont les états physiques de part et d'autres et n la normale sortante. Ainsi la difficulté consiste à suivre le maillage de manière continue (et pas seulement en définissant un vecteur vitesse au nœuds, mais un champ de déplacement continu par morceau) et d'approcher le flux précédent à un ordre de précision associé à la précision voulue. Enfin maintenir la cohérence d'un tel maillage en particulier en 3D est une gageure en soit.



Analyses mathématiques “tous azimuts”. Bien évidemment tous les points pré-cités nécessitent une analyse mathématiques et numérique. Cette dernière sera menée en partenariat avec de véritables mathématiciens que ce soit à l’IMT ou ailleurs. En effet il est absolument nécessaire que le continuum depuis la théorie/analyse mathématique jusqu’à l’utilisation d’outil de simulation pour la physique doit être maintenu. En particulier tout développement émerge régulièrement d’une analyse mathématique préalable, de ce fait tout le projet de recherche est emprunt de cette évidence.

Ce document a été préparé à l'aide de l'éditeur de texte GNU Emacs et du logiciel de composition typographique \LaTeX 2 ϵ . Les figures ont été réalisées avec le logiciel Xfig, les résultats numériques ont été majoritairement réalisés à l'aide de Gnuplot et Paraview.